Tampereen yliopisto

Eeva Mäenpää

YLÄKOULUN MATEMATIIKAN OPETUKSEN ERIYTTÄMINEN YLÖSPÄIN

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Eeva Mäenpää: Yläkoulun matematiikan opetuksen eriyttäminen ylöspäin
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten ylöspäin eriyttävää matematiikan opetusta voidaan järjestää ja mitä mieltä oppilaat ovat matematiikan opetuksen ylöspäin eriyttämisestä.

Tutkimukseen osallistui kahdeksan lukioon haluavaa yhdeksäsluokkalaista oppilasta, jotka aikovat opiskella lukiossa pitkää matematiikkaa. Tutkimus suoritettiin opettamalla tutkimusryhmälle matematiikan aihekokonaisuus yhtälöparit ylöspäin eriyttävänä pienryhmäopetuksena syksyllä 2019. Tutkimuksessa haettiin vastausta siihen, millaiset ylöspäin eriyttävät tehtävät motivoivat oppilaita ja mitä mieltä oppilaat ovat tietokoneen käytöstä matematiikan opiskelussa. Lisäksi selvitettiin, miten ylöspäin eriyttämistä voidaan toteuttaa yläkoulun matematiikan opetuksessa.

Aineistoa kerättiin opetuksen aikana teettämällä oppilaille tutkimusta varten koottuja tehtäviä. Lisäksi jokainen oppilas haastateltiin opetusjakson jälkeen. Haastattelujen kysymykset jaettiin analysointia varten teemoihin helpot, haastavat ja motivoivat tehtävät, tietokoneen käyttö matematiikan tunneilla sekä ylöspäin eriyttämisen tavat. Vastaukset jaettiin tehtävien kohdalla tyypeittäin ja muiden kysymysten osalta kysymyksen aiheen puolesta ja vastaan oleviin vastauksiin.

Tutkimuksen mukaan riittävän haastavat tehtävät motivoivat oppilaita. Tietokoneen käyttö koettiin tärkeäksi lukio-opintojen kannalta. Jatkossa ylöspäin eriyttäviä tehtäviä voisi jakaa sähköisenä lisämateriaalina, jos ohjeistus tietokoneohjelmien käyttöön on riittävä tai opettajalla on aikaa neuvoa. Tunnilla voisi antaa myös tehtäväksi lukion kirjojen tehtäviä opetettavasta aiheesta, tai jos mahdollista, järjestää edistyneille oppilaille matikkapaja toimintaa.

Avainsanat: eriyttäminen, motivaatio, lineaarinen yhtälöryhmä, yhtälöpari

Sisältö

1 Johdanto

Tulevana opettajana yksi opetukseni tavoitteista on, että jokainen oppilaani kokisi omalla tasollaan onnistumisen kokemuksia. Erityistä tukea tarvitsevien oppilaiden opetukseen on ymmärrettävästi erittäin tärkeää panostaa. Kuitenkin myös hyvin koulussa pärjäävien oppilaiden oikeus on saada omalle tasolleen eriyttävää opetusta.

Tämän tutkielman tarkoituksena oli kehittää omaa opettajuuttani ja tutkia erilaisia mahdollisuuksia toteuttaa matematiikan ylöspäin eriyttävää opetusta. Valitsin aiheen, koska halusin, että tutkimuksesta olisi konkreettista hyötyä minulle myöhemmin. Lisäksi opettajakoulutuksen aikana jäin kaipaamaan lisää käytännön esimerkkejä opetuksen eriyttämisestä molempiin suuntiin.

Tutkimuksen tavoitteena oli siis selvittää, miten ylöspäin eriyttävää opetusta voidaan matematiikassa järjestää. Halusin selvittää tarkemmin oppilaiden näkökulmasta, millaiset matematiikan tehtävät heitä motivoivat. Lisäksi halusin selvittää, miten oppilaat sekä opettaja kokevat tietokoneen käytön yläkoulun oppitunneilla. Tutkimus toteutettiin tapaustutkimuksena yhdessä yhdeksännessä luokassa. Opetusta eriytettiin ylöspäin pienryhmässä niiden oppilaiden osalta, jotka aikoivat hakeutua lukioon ja opiskella pitkää matematiikkaa.

Tutkielman luvussa 2 käsitellään opetuksen ylöspäin eriyttämistä opetussuunnitelman näkökulmasta. Ylöspäin eriytettävien oppilaiden oppilaskuvan hahmottamiseksi esitellään myös matemaattisen osaamisen alakäsitteitä sekä muutamia motivaatioteorioita. Lisäksi tutkielmassa tehdään katasaus aikaisempiin tutkimuksiin matematiikan opetuksen eriyttämisestä ylöspäin ja siihen liittyvään materiaaliin.

Tutkimuksen opetusjaksoa varten valmisteltu oppimateriaalin aihe rajautuu yhtälöpareihin ja -ryhmiin sekä niiden ratkaisemiseen. Tämän tutkielman luvussa 3 määritellään yhtälöpari ja -ryhmä sekä niiden ratkaisumenetelmiä eri kouluasteilla.

2 Teoreettinen tausta

Tähän tutkimukseen osallistuneet oppilaat eivät välttämättä ole matematiikan suhteen lahjakkaita oppilaita vaan heillä on tavoite, jonka vuoksi he panostavat matematiikan opiskeluun. He haluavat lukioon ja opiskella pitkän matematiikan oppimäärän. Voitiin siis olettaa, että he ovat motivoituneita matematiikan opiskelijoita, jotta heidän tavoitteensa toteutuu. Koska heidän matematiikan arvosanansa ovat hyviä, voitiin myös olettaa, että oppilailla on suhteellisen hyvä matemaattinen osaaminen tai he ovat lahjakkaita. Tässä luvussa määritellään, mitä tarkoitetaan motivaatiolla ja matemaattisella osaamisella, mitä opetussuunnitelmassa kerrotaan opetuksen eriyttämisestä, erityisesti eriyttämisestä ylöspäin, ja mikä merkitys kielentämisellä on matematiikan opiskelussa ja opetuksen eriyttämisessä.

2.1 Ylöspäin eriyttäminen opetussuunnitelmassa

Opetusta ohjaa opetussuunnitelman perusteet, joissa on kouluasteen oppimäärän lisäksi eritelty muun muassa alaspäin ja ylöspäin eriyttävän opetuksen keinoja ja tarpeellisuutta. Tarkoituksena on tarjota oppilaalle oman osaamistason mukaisia haasteita ja onnistumisen kokemuksia. Peruskoulun opetussuunnitelmasta lainattu lause ”Eriyttäminen perustuu oppilaantuntemukseen ja on kaiken opetuksen pedagoginen lähtökohta.” tiivistää eriyttämisen välttämättömyyden opetuksessa. Opetuksen eriyttäminen vaikuttaa sopivien työtapojen valintaan, sillä oppilailla on erilaisia tapoja oppia. Eriyttämisessä voidaan ottaa huomioon opetuksen laajuus ja aiheen syventäminen sekä opetuksen etenemisnopeus. Eriyttämisessä pyritään ottamaan huomioon oppilaiden yksilölliset tarpeet ja mahdollisuudet oman opiskelun suunnittelemiselle kuten työtapojen valinnalle ja etenemistahdille. Eriyttämällä siis tuetaan oppilaan itsetuntoa ja opiskelun motivaatiota. (POPS 2014, s.30) Alakoulun osalta matematiikan eriyttämisestä sanotaan opetussuunnitelmassa, että vuosiluokilla 1-2 taitaville oppilaille tarjotaan mahdollisuus syventää vuosiluokkien 1-2 sisältöjen ymmärtämistä. Alakoulun vuosiluokilla 3-6 taas taitavia oppilaita tuetaan tarjoamalla heille vaihtoehtoisia työskentelymuotoja ja rikastuttamalla käsiteltäviä sisältöjä. (POPS 2014, s.130, 237) Peruskoulun opetussuunnitelmassa vuosiluokkien 7-9 matematiikan opetuksen ylöspäin eriyttämisestä sanotaan, että taitavia oppilaita tuetaan tarjoamalla heille vaihtoehtoisia työskentelymuotoja, kuten esimerkiksi erilaisia projekteja ja ongelmalähtöisiä tutkimustehtäviä oppilaita kiinnostavista matemaattisista aiheista. Toisaalta matematiikan oppimisympäristöihin ja työtapoihin liittyvät tavoitteet yläkoulussa sisältävät kohdan, että tieto- ja viestintäteknologiaa, kuten taulukkolaskentaa ja dynaamista geometriaohjelmistoa, hyödynnetään opetuksen, oppimisen, tuottamisen, arvioinnin sekä luovuuden välineenä. Lukion opetussuunnitelmassa tuodaan esiin vain alaspäin eriyttäminen oppimisen ja opiskelun tuen kohdalla. Opiskelijan syventyminen matemaattisiin aiheisiin jätetään siten melko paljon opiskelijan vastuulle. Opiskelija voi esimerkiksi suorittaa lukio-opinnoissaan valtakunnallisia tai paikallisia syventäviä ja soveltavia kursseja. (POPS 2014, s.376, LOPS 2015, s.17,20)

2.2 Matemaattinen osaaminen

Tässä luvussa määritellään, mitä tarkoitetaan matemaattisella osaamisella. Oppilaalla, jolle voidaan tarjota ylöspäin eriyttävää opetusta matematiikassa, on hyvä matemaattinen osaaminen. Tällainen oppilas voi olla matemaattisesti lahjakas tai ahkera oppilas. Jorma Joutsenlahti (2005) määrittelee matemaattisen osaamisen väitöskirjassaan viitaten siihen, miten Kilpatrick, Swafford ja Findell esittävät yksilön matemaattisen pätevyyden muodostumisen. Matemaattinen osaaminen on jaettu viiteen eri alakäsitteeseen.

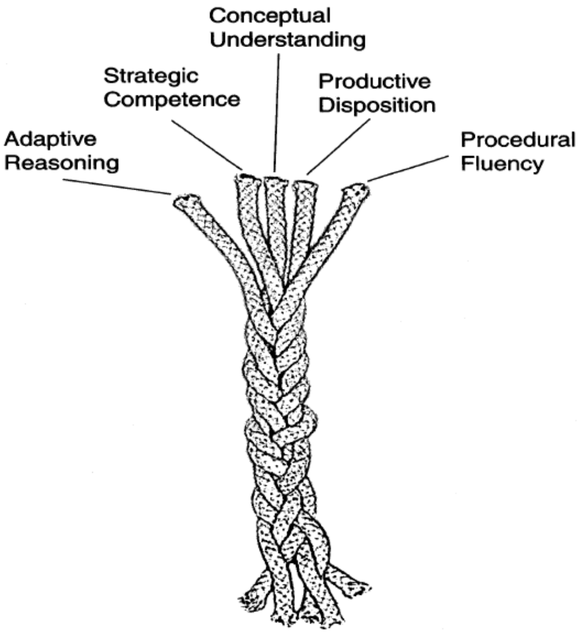
Käsitteellinen ymmärtäminen (conceptual understanding) on matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtämistä. Oppilas, jolla on hyvä käsitteellinen ymmärtäminen, hallitsee laajoja yhtenäisiä asiakokonaisuuksia. Hän osaa liittää näihin kokonaisuuksiin uudet yksittäiset ja erilliset käsitteet ja ratkaisumenetelmät. Kun oppilaalla on hyvä käsitteellinen ymmärrys, toistavaa mekaanista laskemista tarvitsee tehdä vähemmän ja työpanos on mielekkäämpää siirtää tiedon syventävään ja soveltavaan harjoitteluun (Kilpatrick ym. 2001, s. 118).

Proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency) on taito käyttää proseduureja eli laskuoperaatioita joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksen mukaisesti. Proseduraalisesti sujuva oppilas osaa siis laskea sujuvasti. Hän osaa edetä laskutehtävässä järjestelmällisesti ja käyttää sujuvasti laskusääntöjä ja -menetelmiä vastauksen saavuttamiseksi (Kilpatrick ym. 2001, s. 121, Kilpatrick ym. 2002, s. 11).

Strateginen kompetenssi (strategic competence) on kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Jos ratkaisumenetelmä ei ole oppilaalle etukäteen selvä eli sitä ei ilmoiteta esimerkiksi tehtävänannossa, riittävästi strategista kompetenssia omaava oppilas pystyy aikaisemmin oppimansa tiedon avulla valitsemaan sopivan ratkaisumenetelmän ja soveltamaan sitä tehtävään. Tämä tietenkin tarkoittaa sitä, että oppilaalla täytyy olla tarvittava tietopohja erilaisista tai ainakin tarvittavista ratkaisumenetelmistä (Kilpatrick ym. 2001, s. 124).

Mukautuva päättely (adaptive reasoning) on pystyvyys loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen. Ratkaistavan tehtävän tulee olla kuitenkin sen tasoinen, että oppilaalla on mahdollisuudet ymmärtää tehtävä esimerkiksi liittämällä se johonkin tuttuun kontekstiin. Lisäksi tälläkin matemaattisen osaamisen osa-alueella oppilaalla tulee olla riittävä tietopohja, että hän pystyy mukauttamaan päättelynsä ja loogiset tietorakenteensa juuri kyseiseen tehtävään (Kilpatrick ym. 2001, s. 129).

Yritteliäisyys (productive disposition) on kyky nähdä luontaisesti matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana yhdistettynä uskoon ahkeruuden merkityksestä ja omiin kykyihin. Tätä uskoa tukee ulkopuolelta kuten opettajilta, vanhemmilta ja luokkakavereiltakin saatu palaute omasta osaamisesta ja ahkeran tekemisen merkityksestä osaamiseen. Yritteliäisyys on sidoksissa myös opiskelumotivaatioon, johon perehdytään seuraavassa luvussa (Kilpatrick ym. 2001, s. 131, Kilpatrick ym. 2002, s. 16).



Kuva 2.1. Matemaattisen osaamisen osa-alueita kuvaava punos (Kilpatrick 2001, s.117).

Kuten matemaattisen osaamisen osa-alueiden määrittelystä käy ilmi, nämä osa-alueet eivät ole irrallisia vaan punoutuvat yhteen, kuten kuvassa 2.1 on esitetty. Joillain oppilailla on vahvuuksia tai puutteita jollain osa-alueilla, mutta niitä ei voida kokonaan erottaa toisistaan. (Joutsenlahti 2005, s. 96)

2.3 Motivaatio

Motivaatio on hyvin moniulotteinen termi, eikä siitä ole olemassa yksiselitteistä määritelmää. Tässä luvussa tarkastellaan motivaatiota kahden tällä hetkellä hyvin keskeisen motivaatioteorian, itsemääräämisteorian ja odotusarvoteorian, pohjalta ja eritellään sisäisen ja ulkoisen motivaation merkitystä opiskelussa. Lähtökohtaisesti voidaan sanoa, että ihmisellä on aina jokin motivaatio pyrkiessään tiettyyn tavoitteeseen. Tavoitteen saavuttamisen kannalta sisäinen motivaatio tekee siitä mielekkäämpää ja todennäköisesti tehokkaampaa. Opiskeluvalintoihin ja siten myös opiskelumotivaatioon vaikuttaa olennaisesti se, mitkä asiat oppilas kokee tärkeiksi ja kiinnostaviksi sekä minkä hän uskoo olevan hyödyksi itselleen myös tulevaisuudessa.

Decin ja Ryanin itsemääräämisteorian mukaan ihmiset motivoituvat siitä, kun he voivat itse päättää tekemisistään. Oppilaita motivoi mahdollisuus vaikuttaa opintoihinsa esimerkiksi valinnaisten oppiaineiden tai kurssien kautta. Teorian lähtökohtana on oletus, että ihminen on luonnostaan aktiivinen, motivoituva ja itseään ohjaava. On siis tärkeää, että oppilaat saavat olla aktiivisia ja vaikuttaa opiskelutapoihin oppitunneilla. Deci ja Ryan ovat havainneet, että mieleinenkin ulkoinen palkinto on haitallinen sisäisen motivaation ja tavoitteen saavuttamisen kannalta. (Vasalampi 2017, Salmela-Aro 2018)

Ecclesin odotusarvoteorian mukaan motivoituneen toiminnan taustalla vaikuttavat omiin kykyihin liitetyt uskomukset ja odotukset sekä toimintaan liitetty yleinen arvostus. Yleisesti sellaisiin tehtäviin sitoudutaan, joissa uskotaan pärjäävän hyvin ja joita arvostetaan. Kun opiskelija arvostaa jotain oppiainetta tai opiskeltavaa aihetta ja uskoo pärjäävänsä siinä, hän todennäköisesti on myös motivoitunut ja valmis käyttämään aikaa tehtävien suorittamiseen. Tämä johtaa menestykseen ja lisää uskoa omasta pärjäämisestä. Toisaalta, jos oppilas ei koe pärjäävänsä jossain oppiaineessa, hän ei todennäköisesti myöskään panosta siihen. (Viljaranta 2017, Salmela-Aro 2018)

Sisäisen motivaation määritelmässä olennaista on, ettei tavoitetta haluta saavuttaa siitä saatavan ulkoisen palkinnon saamiseksi. Opiskelussa sisäinen motivaatio on hyödyllinen, sillä se johtaa luovuuteen, sinnikkyyteen sekä syvempään käsitteiden ymmärtämiseen. Oppilaan matematiikan opiskeluun voi vaikuttaa oma halu oppia matematiikkaa ja ymmärrys sen tärkeydestä omassa tulevaisuudessaan, mikä saa aikaan sisäisen motivaation matematiikan opiskeluun. Tämä osoittaa kypsyyttä ottaa vastuuta oman opiskelun suunnitteluun. Sisäinen motivaatio voidaan määritellä lyhyesti niin, että tavoitteen saavuttamista ei ohjaa ulkopuolelta saatava palkinto. (Vasalampi 2017)

Toisaalta opiskelutavoitetta voi ohjata esimerkiksi matematiikan merkitys jatko-opintoihin hakeutuessa, jolloin ulkoinen motivaatio saa aikaan pitkän ajan suunnitelmallisuutta ja ulkoinen motivaatio voi sisäistyä osaksi oman tavoitteen saavuttamista. Ulkoinen motivaatio on silloin osittain sisäistynyt, jos oppilas opiskelee oppiainetta, koska pitää aineen aihepiirien hallitsemista tärkeänä esimerkiksi jatko-opintojen kannalta muutenkin kuin keskiarvoa nostavan hyvän arvosanan vuoksi. (Vasalampi 2017) Yksilö saattaa myös valita tavoitteensa ulkoisen tai sosiaalisen paineen vaikutuksen alaisena. Esimerkiksi oppilaan opiskellessaan ainoastaan saavuttaakseen hyvät arvosanat haluamaansa jatko-opintopaikkaa varten tai kavereiden valintojen ja vanhempien toiveiden mukaan, eikä todellisen kiinnostuksen vuoksi. On kuitenkin tavallista, että yksilö työskentelee elämänsä aikana myös sellaisten tavoitteiden saavuttamiseksi, joihin hän ei ole itse sisäisesti motivoitunut.

2.4 Kielentämisen merkitys opetuksen eriyttämisessä

Matemaattinen symbolijärjestelmä ei ole ainoa tapa esittää matematiikkaa vaan luonnollinen kieli, kuviot ja symboliset lausekkeet ovat osana matematiikan esitystä. Luonnollinen kieli on ratkaisun tekijän käyttämä puhekieli. Kuvioita, kuvia ja piirroksia käytetään havainnollistamaan matemaattista ratkaisua. Matematiikan opetuksen keskeinen haaste on, kuinka matemaattista ajattelua voidaan selittää sanallisesti ja kuinka se saadaan koulussa osaksi opetusta ja oppimista. Kielentäminen antaa mahdollisuuden seurata oppilaan ajatteluprosessia ja myös kehittää sitä. Suullinen kielentäminen on luokkahuonetyöskentelyssä lähinnä keskustelua, ratkaisujen selittämistä sekä käsitteiden liittämistä arkielämän ilmiöihin.

Tehtävän ratkaisun selittäminen vaatii ratkaisun kielentämistä ja oman ajatusprosessin jäsentämistä, joka tukee matemaattista ajattelua ja käsitteiden syvempää ymmärtämistä. Käsitteiden selittämisestä opettaja pystyy suhteellisen nopeasti toteamaan, onko oppilas oikeasti sisäistänyt käsitteen merkityksen, kun mekaaninen laskulausekkeiden osaaminen saattaa onnistua hyvin ilman matemaattisen teorian syvempää ymmärrystä. Tehtävien kielentäminen ja selittäminen ääneen sekä toisten oppilaiden ratkaisujen kuunteleminen haastaa omaa osaamista. Kun oma ja toisen ratkaisutapa eivät olekaan samanlaiset, voidaan keskustelemalla perustella omaa ratkaisua. Näin molemmat keskustelijat voivat syventää tai laajentaa omaa osaamista aiheesta tai toisaalta omat väärät käsitykset voivat tulla ilmi ja korjatuksi. (Joutsenlahti 2018)

2.5 Tutkimuksia matematiikan eriyttämisestä ylöspäin

Tässä luvussa käsitellään aikaisemmin tehtyjä pro gradu -tutkielmia matematiikan opetuksen ylöspäin eriyttämisestä. Näissä tutkimuksissa saatuja tuloksia ja pohdintoja käsitellään lisäksi tämän tutkielman aineiston analysoinnin yhteydessä.

Ylöspäin eriyttämistä on tutkinut lahjakkaan oppilaan opetuksen eriyttämisen näkökulmasta Essi Lahdenperä Turun yliopistosta vuonna 2018. Tutkimuksessa on haastateltu lahjakkaita oppilaita ja selvitetty, miten lahjakkaat oppilaat kokevat saamansa opetuksen eriyttämisen koulussa, kokevatko he saaneensa sitä ja kaipasivatko he sitä mahdollisesti enemmän. Tutkimuksessa havaittiin opiskelumotivaation ylläpitäminen olevan suurin haaste. Ainoa selkeästi kaivattu konkreettinen eriyttämisen keino oli haastavammat tehtävät. Oppilaille annetut lisätehtävät olivat usein perustehtävien tasoa, mutta syventävät ja soveltavat tehtävät olisivat motivoineet lahjakkaita oppilaita enemmän. (Lahdenperä 2018)

Toisaalta Mari Yli-Sikkilä Tampereen yliopistosta vuonna 2014 on tehnyt tutkimuksen soveltavasta laskemisesta ja ongelmaratkaisusta, jossa hän on myös tutkinut matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden eriyttämistä matematiikan lisämateriaaleilla. Tässä tutkimuksessa suurin osa lisämateriaalista oli ongelmanratkaisutehtäviä. Näistä ongelmanratkaisutehtävistä oppilaille oli mielekkäimpiä ne tehtävät, jotka liittyivät arkielämään. Lisäksi tutkimuksessa todetaan ongelmanratkaisutehtävien olevan tärkeitä koko luokalle eikä ainoastaan lahjakkaille oppilaille. (Yli-Sikkilä 2014)

Alaspäin eriyttäminen yleisessä tuessa on jokaisessa koulussa toteutettava eriyttämistoimi. Lisäksi yleisessä tuessa voitaisi ottaa huomioon myös ylöspäin eriyttävän opetuksen tarve, jota ovat Joel Pöntinen ja Tuomas Vuori käsitelleet vuonna 2019 tutkimuksessaan ”Matematiikan ylöspäin eriyttäminen yleisessä tuessa – Matematiikan aineenopettajien näkökulma”. Yleisessä luokkaopetuksessa opettajien haasteena ovat suuret ryhmäkoot ja oppilaiden vaihteleva osaamistaso. Tässäkin tutkimuksessa johtopäätöksenä oli, että lahjakkaat oppilaat eivät saa riittävästi tukea oppimiseensa. Ratkaisuna esitetään tasoryhmiä, jotka mahdollistaisivat oppilaiden taitotason mukaisen opettamisen, paremmin muokattavia sähköisiä materiaaleja ja verkkokursseja sekä arkielämään liittyviä ja ongelmalähtöisiä tehtäviä. (Pöntinen, Vuori 2019)

Luokan sisällä tapahtuvan eriyttämisen sijaan koko ikäryhmä voidaan siis koulussa jakaa tasoryhmiin, jossa jokainen oppilas saa omalle tasolleen sopivaa opetusta. Tasoryhmäopetusta on tutkinut Elina Loukasmäki Tampereen yliopistosta 2007 tutkimuksessaan ”Joustava ryhmittely matematiikassa”. Tutkimuksessa oppilaiden kokemukset ovat olleet pääosin positiivia. Kuitenkin oppilaat ovat sitä mieltä, että tasoryhmät eriarvoistavat. Tällöin osa oppilaista ei voisi edes saada hyviä numeroita, jos vaikeita asioita ei edes opeteta heille. Toisaalta suurin osa oppilaista ei kuitenkaan ollut kokenut arvostelua tasoryhmään kuulumisen takia. Tutkimuksen johtopäätöksenä on myös, että joustavan ryhmittelyn nähdään edistävän kaikkien oppilaiden oppimista tasosta huolimatta. (Loukasmäki 2007)

Lisäksi opettajien kokemuksia ylöspäin eriyttämisestä matematiikassa on tutkinut Heidi Usenius vuonna 2015 Helsingin yliopistosta. Tutkimuksessa opettajien näkemykset opetuksen ylöspäin eriyttämisestä jaettiin kahteen kategoriaan. Eriyttäminen nähtiin ajallisena ja taidollisena eriyttämisenä. Osa oppilaista on nopeita laskijoita ja heille tarjottiin lisätehtäviä, joiden taso saattoi olla kuitenkin sama kuin perustehtävien. Taitaville oppilaille taas tarjottiin haastavampia tehtäviä perustehtävien lisäksi. Tutkimuksessa myös todettiin, että kotitehtävien tulisi olla mukautettu oppilaiden taitotasoon, eikä olla kaikille samat. (Usenius 2015)

2.6 Katsaus matematiikan ylöspäin eriyttävään materiaaliin

Tässä luvussa esitellään muutamien yläkoulun matematiikan oppikirjasarjojen tapaa toteuttaa tehtävillä opetuksen eriyttämistä.

Tutkimukseen osallistuneella luokalla oli käytössä Sanoma Pron Kuutio -kirjasarja. Kuutiossa tehtävät on jaettu neljää eri tasoon, jotka on merkitty värillisillä palloilla. Jokaisesta kappaleesta löytyy yhden harmaan pallon tehtäviä, jotka ovat yhteisiä tehtäviä. Nämä yhteiset tehtävät käsittelevät opittavan aiheen perusteet. Seuraavaksi oppilas voi siirtyä yhden värillisen pallon perustehtäviin tai kahden värillisen pallon syventäviin tehtäviin. lisäksi kirjassa on nopeimmille laskijoille lisätehtäviä, joissa saattaa olla myös kolmen värillisen pallon harrastetehtäviä. Harrastetehtävien kerrotaan olevan usein erittäin vaativia. Kuutio -sarjassa on myös erikseen *Kuutio Ekspertti*, joka sisältää ylöspäin eriyttäviä tehtäviä koko peruskoulun oppimäärään. Kirja ei sisällä erikseen teoriaa eikä esimerkkejä vaan ainoastaan tehtäviä. Tehtävien kappaleet ovat numeroitu ja nimetty vastaamaan varsinaista oppikirjaa. Tätä ylöspäin eriyttävää kirjaa on siis hyvä käyttää oppilaan oman oppikirjan lisäksi koko ajan tai lisämateriaalina. (Hassinen ym. 2017)

Muilta kustantajilta olevia yläkoulun matematiikan kirjasarjoja ovat muun muassa Otavan *Pii* ja Editan *Säde*. Pii -kirjasarjassa on opittavasta aiheesta kolmentasoisia harjoitustehtäviä, joiden avulla opetusta voidaan eriyttää sekä yksi pulmatehtävä. Lisäksi lähes jokaisesta aiheesta on ekstratehtäväosio, joka on tarkoitettu lahjakkaille oppilaille. (Heinonen yms. 2015) Editan Säde -kirjasarjassa tehtävät on jaettu sarjoihin. Ensin aiheesta on yhteiset tehtävät, jonka jälkeen oppilas voi siirtyä sarjaan 1 tai Sarjaan 2. Sarjan 2 tehtävät sopivat lahjakkaimmille oppilaille. Lisäksi sarjasta 2 löytyy värillisellä laatikolla merkittyjä tehtäviä, jotka ovat erityisen vaativia. Säde-sarjassa on myös erikseen arkeen ja ammattien matematiikkaan liittyviä soveltavia tehtäviä, jotka ovat laajempia tehtäväkokonaisuuksia kuin normaalit tuntitehtävät. (Etelämäki ym. 2016)

Lisäksi ammattikoulun ja lukion oppikirjoissa on samoja aiheita kuin yläkoulun matematiikassa, joten ylöspäin eriyttävää materiaalia voi tuoda tunneille käyttämällä myös korkeamman asteen oppimateriaalia. Lisäksi erilaiset sähköiset materiaalit ja ohjelmat ovat hyviä tapoja monipuolistaa eriyttävää opetusta.

3 Lineaarinen yhtälöryhmä

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen opetusjakson matemaattista aihetta tarkemmin. Ensin aiheen määritelmät, lauseet ja niiden todistukset käsitellään yliopistomatematiikan tasolla. Seuraavaksi käsitellään aihetta ensin lukion ja sitten yläkoulun opetussuunnitelmien ja oppikirjojen sisältöjen mukaisesti.

Tutkimuksen matemaattinen aihe valikoitui opetusjakson ajankohdan mukaan sekä sen perusteella, mikä aihe tutkimusryhmän matematiikan opettajan mielestä oli sopiva ylöspäin eriyttävälle kokonaisuudelle hänen oppilailleen. Tapaustutkimus tehtiin matematiikan tunneilla, joissa opetettavana aiheena tutkimuksen aikana oli yhtälöparin ratkaisu ja kirjana Sanoma Pron *Kuutio Y, funktio ja yhtälöpari*.

3.1 Määritelmiä

Esitetään seuraavaksi tarpeellisia määritelmiä matriiseille yhtälöryhmien tarkastelemiseksi.

Määritelmä 3.1. *Matriisi* on suorakulmainen $m \times n$ -taulukko muotoa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right],$$

jossa m on *rivien*, n on *sarakkeiden* lukumäärä ja a_{ij} on matriisin *alkio* (Haukkanen 2017, s. 4).

Määritelmä 3.2. Olkoon A $m \times r$ -matriisi ja B $r \times n$ -matriisi. Niiden *tulo* AB on $m \times n$ -matriisi

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}\right].$$

Toisin sanoen $AB = C$, missä $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$ (Haukkanen 2017, s. 6).

Määritelmä 3.3. *Neliömatriisi* on kokoa $n \times n$ oleva matriisi. Neliömatriisin alkioita $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ kutsutaan *diagonaalialkioiksi*. Jos $a_{ij} = 0$, kun $i \neq j$, niin A on *diagonaalimatriisi* (Haukkanen 2017, s. 5).

Määritelmä 3.4. *Identiteettimatriisi* on $n \times n$ -neliömatriisi I, jolle pätee

$$AI = IA = A$$

aina, kun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (Haukkanen 2017, s. 10).

Lause 3.5. *Identiteettimatriisi on sellainen $n \times n$ -diagonaalimatriisi, jonka jokainen diagonaalialkio on 1.*

Todistus. Sivuutetaan (Haukkanen 2017, s. 10 Lause 1.3.9). □

Määritelmä 3.6. Matriisin A *Käänteismatriisi* on neliömatriisi B, jolle pätee

$$AB = BA = I.$$

Jos tällainen matriisi B on olemassa, niin matriisi A on *kääntyvä* (Haukkanen 2017, s. 11).

Merkintä. Jatkossa merkitään matriisin A käänteismatriisia A^{-1}.

Merkintä. Seuraavassa määritelmässä matriisia, joka on muodostettu $n \times n$ -neliömatriisista A poistamalla i. rivi ja j. sarake, merkitään A'_{ij}.

Määritelmä 3.7. *Determinantti* $n \times n$ -neliömatriisille A merkitään

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Kun $n \geq 2$, niin

$$\begin{aligned} \det(A) = \quad & a_{11} \det(A'_{11}) - a_{12} \det(A'_{12}) + a_{13} \det(A'_{13}) - \\ & a_{14} \det(A'_{14}) + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A'_{1n}) \end{aligned}$$

(Beezer 2015, s. 346).

Lause 3.8. *Neliömatriisi on kääntyvä, jos ja vain jos* $\det(A) \neq 0$.

Todistus. Sivuutetaan (Haukkanen 2017, s. 21 Lause 1.6.2). □

Seuraavassa määritelmässä *nollarivi* tarkoittaa sellaista matriisin riviä, jonka jokainen alkio on nolla.

Määritelmä 3.9. *Porrasmatriisi* toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Mahdolliset nollarivit ovat alimpina.
2. Kullakin rivillä ensimmäinen nollasta poikkeava alkio, *johtava alkio*, on ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella (Häsä 2013, s.22).

3.2 Lineaarisen yhtälöryhmän algebrallinen tarkastelu

Lineaarinen yhtälö on ensimmäisen asteen polynomiyhtälö, jossa on ainoastaan vakiotermejä tai jollakin vakiolla kerrottuja ensimmäisen asteen muuttujia. Lineaarinen yhtälöryhmä on ryhmä lineaarisia yhtälöitä, joille etsitään yhteistä ratkaisua.

Määritelmä 3.10. *Lineaarinen yhtälöryhmä* on yleisesti muotoa

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

missä termit a_{ij} ovat vakiokertoimia ja termit b_i ovat vakiotermejä, kun ($1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$). Luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat muuttujia. Tätä kutsutaan m:n yhtälön n:n muuttujan lineaariseksi yhtälöryhmäksi. (Haukkanen 2017)

Määritelmä 3.11. Yhtälöryhmän, jossa on n muuttujaa, ratkaisut ovat reaalilukujonoja $(s_1, \ldots, s_n)$ siten, että $a_{j1}s_1 + \ldots + a_{jn}s_n = b_j$, jokaisella $j \in \{1, \ldots, m\}$. *Yhtälöryhmän ratkaisujoukko* on kaikkien ratkaisujen joukko (Hella 2020).

Yhtälöryhmä voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

joka voidaan määritelmän 3.2 mukaan kirjoittaa muodossa

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

jossa x on pystyvektori, joka on yllä olevassa kaavassa.

Jos yhtälöryhmässä on kolme muuttujaa, niitä merkitään usein symbolein x, y ja z. Vastaavasti, jos muuttujia on kaksi, niitä merkitään symbolein x ja y. Tästä eteenpäin tarkastellaan vain sellaisia yhtälöryhmiä, joissa on yhtä monta yhtälöä kuin on muuttujia. Tällaisen yhtälöryhmän kerroinmatriisi on $n \times n$ -neliömatriisi.

Merkintä. Luvussa 3.3 lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmiä esitettäessä yhtälöryhmä esitetään laajennetussa matriisimuodossa seuraavasti

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right],$$

jossa on esitetty ainoastaan yhtälöryhmän vakiokertoimet a_{ij} sekä vakiotermit b_i.

Määritelmä 3.12. Lineaarista yhtälöryhmää $Ax = b$ sanotaan *homogeeniseksi* yhtälöryhmäksi, jos $b = 0$. Muuten yhtälöryhmää sanotaan *epähomogeeniseksi* (Friedberg ym. 1997, s.160).

Jokaisella homogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä on vähintään yksi ratkaisu, joka on *nollavektori*, tai äärettömän monta ratkaisua. Lineaarisella epähomogeenisella yhtälöryhmällä voi olla 0, 1 tai äärettömän monta ratkaisua. Homogeenisen yhtälöryhmän tarkastelu sivuutetaan.

Lause 3.13. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Jos* $\det A \neq 0$, *niin epähomogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä $Ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $A^{-1}b$.*

Todistus. Oletetaan, että $\det A \neq 0$. Lauseen 3.8 nojalla A on kääntyvä. Sijoitetaan $A^{-1}b$ yhtälöryhmän lausekkeeseen. Saadaan $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Täten $A^{-1}b$ on yhtälöryhmän ratkaisu. Jos s on mielivaltainen ratkaisu, niin $As = b$. Kerrotaan molemmat puolet matriisilla A^{-1}. Saadaan $s = A^{-1}b$. Täten yhtälöryhmällä on yksi ja vain yksi ratkaisu, $A^{-1}b$. (Friedberg ym. ym. 1997, s. 163) □

Lause 3.14. *Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Jos* $\det A = 0$, *niin epähomogeenisella lineaarisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua.*

Todistus. Sivuutetaan. (Haukkanen 2017, s. 29, Friedberg ym. 1997, s. 164) □

3.3 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmiä

Määritelmä 3.15. Kahta lineaarista yhtälöryhmää sanotaan *ekvivalenteiksi* eli yhtä pitäviksi, jos niillä on sama ratkaisujoukko. (Friedberg ym. 1997)

Siis lineaarista yhtälöryhmää voidaan muokata toiseen muotoon sen ratkaisemiseksi, kunhan muokattu yhtälöryhmä on ekvivalentti alkuperäisen yhtälöryhmän kanssa. Kun yhtälöryhmä ratkaistaan matriisimuodossa, käytetään seuraavia rivio-peraatioita.

Määritelmä 3.16. *Rivioperaatiot*
1. Kahden yhtälön paikkaa vaihdetaan.
2. Yhtälö kerrotaan puolittain nollasta eroavalla vakiolla.
3. Yhtälön puolittainen monikerta lisätään puolittain toiseen yhtälöön.
(Haukkanen 2017)

Kun yhtälöryhmä ratkaistaan matriisimuodossa rivioperaatioiden määritelmässä 3.16 sana *yhtälö* korvataan sanalla *rivi* ja kohdassa 3. rivejä ja niiden monikertoja voidaan lisätä toisiin riveihin.

Määritelmä 3.17. Matriisi A on *riviekvivalentti* matriisin B kanssa, jos B saadaan matriisista A rivioperaatioilla (Häsä 2013, s.21).

Lause 3.18. *Jos yhtälöryhmiä vastaavat matriisit ovat riviekvivalentit, yhtälöryhmät ovat ekvivalentit, siis niillä on täsmälleen samat ratkaisut.*

Todistus. Osoitetaan, että rivioperaatiot eivät vaikuta yhtälöryhmän ratkaisuihin.
1. Huomataan, että rivien järjestyksellä ei ole väliä. Siten kahden rivin paikan vaihtaminen ei muuta yhtälöryhmän ratkaisua (Häsä 2013, s. 31).

2. Olkoon eräs yhtälöryhmän yhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

joka kerrotaan nollasta eroavalla vakiolla c. Tämä yhtälö voidaan seuraavassa vaiheessa esittää muodossa

$$ca_1x_1 + ca_2x_2 + \ldots + ca_nx_n = cb.$$

Muut yhtälöryhmän yhtälöt eivät muutu.

Jos $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ on alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisu, niin

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b.$$

Näin ollen

$$(ca_1)s_1 + (ca_2)s_2 + \ldots + (ca_n)s_n = cb.$$

Koska jälkimmäiset yhtälöt ovat molemmissa tapauksissa samat, niin $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ on myös yhtälöryhmän toisen vaiheen ratkaisu.

Oletetaan toisaalta, että $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ on yhtälöryhmän toisen vaiheen ratkaisu. Täten

$$ca_1t_1 + ca_2t_2 + \ldots + ca_nt_n = cb.$$

Kertomalla yhtälö luvulla c^{-1} saadaan

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n = b.$$

Jälleen kaikki muut yhtälöryhmän yhtälöt ovat pysyneet samoina. Täten $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ on myös yhtälöryhmän ensimmäisen vaiheen ratkaisu. (O'Nan 1976, s. 6)

3. Olkoon eräs yhtälöryhmän yhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

ja olkoon

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = d$$

eräs ytälöryhmän yhtälö, joka lisätään yhtälöön $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$. Täten yhtälöryhmän seuraavassa vaiheessa yhtälö $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ on muotoa

$$(a_1 + c_1)x_1 + (a_2 + c_2)x_2 + \ldots + (a_n + c_n)x_n = b + d,$$

kun taas kaikki muut yhtälöryhmän yhtälöt pysyvät ennallaan. Oletetaan nyt, että $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ on alkuperäisen yhtälöryhmän ratkaisu. Tällöin

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$$

$$c_1s_1 + c_2s_2 + \ldots + c_ns_n = d.$$

Näin ollen

$$(a_1 + c_1)s_1 + (a_2 + c_2)s_2 + \ldots + (a_n + c_n)s_n = b + d.$$

Koska kaikki muut yhtälöt alkuperäisessä ja sitä seuraavassa yhtälöryhmässä ovat identtisesti samoja, niin $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ on myös toisen yhtälöryhmän ratkaisu.

Oletetaan seuraavaksi, että $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ on yhtälöryhmän toisen vaiheen ratkaisu. Tällöin

$$\begin{array}{cccccc} (a_1 + c_1)t_1 + & (a_2 + c_2)t_2 + & \ldots + & (a_n + c_n)t_n & = & b + d \\ c_1t_1 + & c_2t_2 + & \ldots + & c_nt_n & = & d. \end{array}$$

Näin ollen

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n = b.$$

Jälleen kaikki muut yhtälöt yhtälöryhmässä ovat pysyneet samoina, siis $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ on myös yhtälöryhmän ensimmäisen vaiheen ratkaisu (O'Nan 1976, s. 7). □

Merkintä. Määritelmän 3.16 rivioperaatiot merkitään matriisin oikealle puolelle sen rivin kohdalle, jolle operaatio suoritetaan. Riviä, jonka monikerta lisätään, merkitään roomalaisella numerolla.

Seuraavaksi esitellään muutama ratkaisumenetelmä.

3.3.1 Gaussin eliminaatiomenetelmä

Määritelmä 3.19. *Redusoitu porrasmatriisi* toteuttaa seuraavat ehdot:
1. Rivin ensimmäisen nollasta poikkeavan luvun tulee olla yksi. Tätä sanotaan johtavaksi alkioksi.
2. Jos rivillä on ainoastaan nollia, niin se sijoitetaan matriisin pohjalle.
3. Rivien tulee sijoittua niin, että alemman rivin johtava alkio on sitä ylemmän rivin johtavan alkion oikealla puolella.
(Anton ym. 2013)

Gaussin eliminaatiomenetelmässä yhtälöryhmän matriisimuoto saatetaan redusoituun porrasmatriisimuotoon määritelmän 3.16 rivioperaatioita käyttäen. Tämän jälkeen yhtälöryhmän ratkaisu voidaan määrittää sijoittamalla jo ratkenneet muuttujien arvot yhtälöryhmässä alhaalta ylöspäin, kunnes jokaisen muutujan arvo on saatu ratkaistua.

Esimerkki 3.20. Ratkaistaan seuraava yhtälöryhmä Gaussin eliminaatiomenetelmää käyttäen.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 13 \\ -x + 2y - 3z = -20 \\ -x + 3y - 3z = -22 \end{cases}$$

Muutetaan yhtälöryhmä matriisimuotoon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & -3 & -20 \\ -1 & 3 & -3 & -22 \end{array}\right]$$

Muokataan matriisia seuraavaksi rivioperaatioita käyttämällä.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & -3 & -20 \\ -1 & 3 & -3 & -22 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\text{II} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +\text{I} \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -\text{II} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Matriisi voidaan nyt muuttaa takaisin yhtälöryhmämuotoon. Muuttujien arvot voidaan ratkaista sijoittamalla tunnetut arvot muuttujiin alhaalta ylöspäin.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 13 \\ \quad\;\; y - \;\, z = -7 \\ \qquad\quad\;\; z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$$

3.3.2 Gaussin-Jordanin eliminaatiomenetelmä

Lisätään määritelmään 3.19 seraava ehto:
4. Jos sarakkeessa on johtava alkio yksi, niin muut sarakkeen luvut ovat nollia.

Tällöin matriisin ratkaistu muoto muistuttaa identiteettimatriisia, jolloin matriisista voidaan lukea suoraan jokaisen muuttujan ratkaisu. (Anton ym. 2013)

Esimerkki 3.21. Jatketaan edellisen esimerkin matriisin ratkaisemista niin, että se täyttää Gaussin-Jordanin eliminaatiomenetelmän ehdot. Tällöin valmiista matriisista nähdään suoraan yhtälöryhmän ratkaisu.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +\text{III} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2\text{III} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$$

3.3.3 Yhtälöryhmän ratkaiseminen eliminoimalla ja sijoittamalla muuttuja

Ratkaistaan yhtälöpari muuttamatta sitä matriisimuotoon.

Esimerkki 3.22. Ratkaistaan yhtälöpari käyttämällä määritelmän 3.16 rivioperaatioita. Tavoitteena on saada yhtälöryhmän jokaiselle riville vasemmalle puolelle yksi tuntematon muuttuja ja oikealle puolelle sitä vastaava vakioarvo.

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 6y = -3 \end{cases}$$

Eliminoidaan ensin y toisesta yhtälöstä, jonka jälkeen sijoitetaan ratkaistu muuttujan x arvo ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 6y = -3 \quad || + 2\mathrm{I} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x = 3 \quad || \cdot \dfrac{1}{3} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x + 3y = 3 \quad || x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 1 + 3y = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 3y = 2 \quad || \cdot \dfrac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = \dfrac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

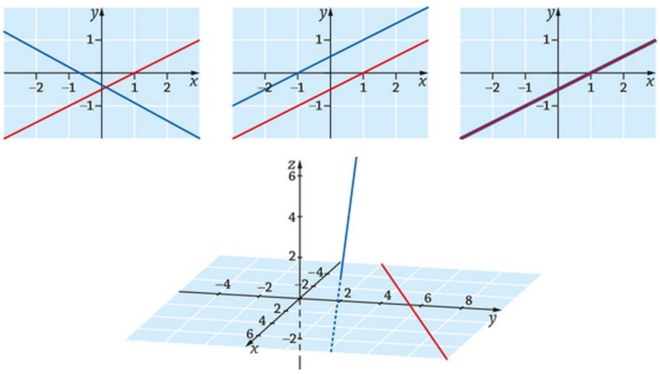
(Haukkanen 2017, s.24)

3.4 Yhtälöparin ratkaiseminen lukion matematiikassa

Tässä luvussa kerrotaan yhälöparien opiskelusta lukiossa ja mitä tästä aiheesta sanotaan lukion opetussuunnitelmassa. Yhtälöpareja opiskellaan lukion lyhyen matematiikan toisella kurssilla ja pitkän matematiikan neljännellä kurssilla.

Lukion opetussuunnitelmassa lyhyen matematiikan toisen kurssin *MAB2 Lausekkeet ja yhtälöt* tavoitteena mainitaan, että opiskelija vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan ja osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. Lisäksi kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu ongelmien muotoileminen yhtälöiksi ja yhtälöiden ja yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen (LOPS 2015). Pitkän matematiikan neljännen kurssin *MAA4 Vektorit* tavoitteena mainitaan, että opiskelija ymmärtää yhtälöryhmän ratkaisemisen periaatteen ja osaa käyttää teknisiä apuvälineitä suoriin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa. Tämän kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu yhtälöryhmän ratkaiseminen (LOPS 2015). Lyhyen matematiikan kurssilla opiskellaan siis yhtälöparin ratkaisua ja pitkän matematiikan kurssilla opiskellaan lisäksi yhtälöryhmän ratkaisua.

Otavan lyhyen matematiikan Huippu -kirjasarja esittelee yhtälöparin ratkaisemisen määrittämällä leikkauspisteen graafisesti. Tehtävissä on enintään kahden muuttujan yhtälöitä. Yhtälöparit ovat siis ratkaistavissa x, y -koordinaatistossa. Pitkän matematiikan Juuri -kirjasarjassa yhtälöryhmän käsittely aloitetaan algebrallisilla menetelmillä. Ensin tutkitaan toteuttavatko luvut yhtälön, jonka jälkeen esitetään sijoitus- ja yhteenlaskumenetelmät esimerkkien avulla. Kirjassa esitetään suoran yhtälöiden muodostamien yhtälöparien ja -ryhmien mahdolliset ratkaisut myös x, y, z -koordinaatistossa.



Kuva 3.1. Suorat tasossa ja avaruudessa (Hähkiönniemi ym. 2016)

Lukion algebrallisesti ratkaistavissa yhälöparitehtävissä käytetään määritelmän 3.16 ja esimerkin 3.22 mukaisia menetelmiä. Pitkän matematiikan kirjassa mainitaan, että yhälöryhmää sanotaan lineaariseksi, jos yhälöiden kaikki termit sisältävät korkeintaan yhden ensimmäisen asteen muuttujan. Esimerkiksi Huippu -kirjasarjassa yhtälöparin algebrallisen ratkaisemisen vaiheet esitetään seuraavalla tavalla.

3.4.1 Yhtälöparin ratkaiseminen sijoitusmenetelmällä

Sijoitusmenetelmän vaiheet

1. Ratkaistaan toisesta yhtälöstä toinen muuttuja.
2. Sijoitetaan saatu lauseke toiseen yhtälöön ja ratkaistaan jäljelle jäänyt muuttuja.
3. Sijoitetaan ratkaistu muuttujan arvo kohdan 1 yhtälöön ja ratkaistaan toinen muuttuja (Halinen ym. 2015).

Esimerkki 3.23. Ratkaistaan seuraava yhtälöpari sijoitusmenetelmää käyttäen

$$\begin{cases} x = 3y + 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Koska ensimmäinen yhtälö on muutujan x suhteen ratkaistussa muodossa, voidaan muuttujaa x vastaava lauseke sijoittaa toiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} (3y + 1) - 2y &= 2 \\ \Leftrightarrow 3y + 1 - 2y &= 2 \qquad || - 1 \\ \Leftrightarrow 3y - 2y &= 2 - 1 \\ \Leftrightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = 1$ ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} x &= 3 \cdot 1 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= 3 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on siis (4, 1).

3.4.2 Yhtälöparin ratkaiseminen yhteenlaskumenetelmällä

Yhteenlaskumenetelmän vaiheet

1. Kerrotaan tai jaetaan yhtälöt sopivilla luvuilla niin, että toisen muuttujan kertoimiksi saadaan vastaluvut.

2. Lasketaan yhtälöt yhteen ja ratkaistaan jäljelle jäänyt muuttuja.

3. Toistetaan kohdat 1 ja 2 toiselle muuttujalle tai siirrytään sijoitusmenetelmään (Halinen ym. 2015).

Esimerkki 3.24. Ratkaistaan seuraava yhtälöpari yhteenlaskumenetelmää käyttäen

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

Kerrotaan molemmat yhtälöt sellaisilla luvuilla, että muuttujan y kertoimet ovat toistensa vastaluvut.

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x + 3y = -1 & \quad || \cdot 2 \\ 3x - 2y = 5 & \quad || \cdot 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow +&\begin{cases} 4x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 15 \end{cases} \\
\hline
&13x \quad = 13 \qquad || : 13 \\
\Leftrightarrow &\qquad x = 1
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 1$ ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 1 + 3y &= -1 \\
\Leftrightarrow 2 + 3y &= -1 \qquad || - 2 \\
\Leftrightarrow 3y &= -3 \qquad || : 3 \\
\Leftrightarrow y &= -1
\end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on siis $(1, -1)$.

3.5 Yhtälöparin ratkaiseminen peruskoulun matematiikassa

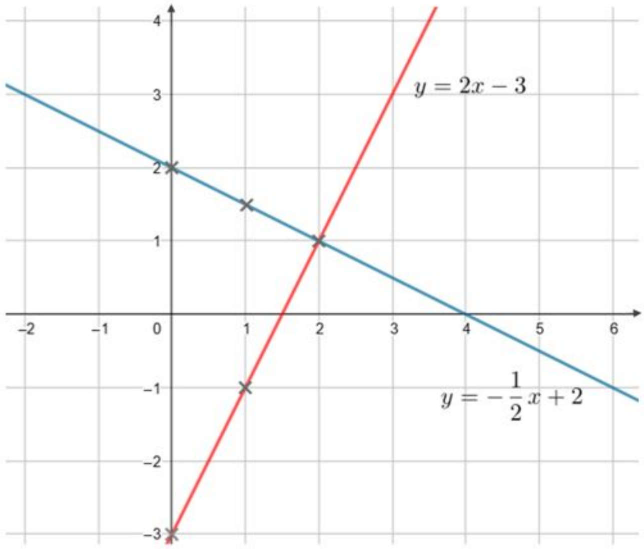
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa vuosiluokkien 7-9 matematiikan algebralliseen sisältöön kuuluu yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen (POPS 2014).

3.5.1 Yhtälöryhmän ratkaiseminen graafisesti

Yhtälöpareja ja -ryhmiä ratkaistaan graafisesti piirtämällä suorien kuvaajat vihkoon tai jollain tietokoneihjelmalla kuten Geogebralla. Kuvaajien leikkauspisteestä nähdään yhtälöparin ratkaisu, kuen kuvassa 3.2.

x	$y = 2x - 3$
0	$y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$
1	$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$
2	$y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

x	$y = -\frac{1}{2}x + 2$
0	$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$
1	$y = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 2 = 1\frac{1}{2}$
2	$y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 1$



Kuva 3.2. Yhtälöparin graafinen ratkaiseminen.

Luvussa 3.4 esitellyt algebrallisen ratkaisemisen menetelmät eli sijoituskeino ja yhteenlaskukeino eli eliminointi, opitaan jo yläkoulussa. Esimerkiksi Kuutio -kirjasarjan kirjassa *Kuutio Y* yhtälöparin ratkaisu aloitetaan yhtälöpareista, joissa toinen yhtälö on yhden muuttujan yhtälö. Yläkoulussa sovelletaan yhtälöpareja myös sanallisten tehtävien ratkaisuun (Hassinen ym. 2017).

4 Tutkimuskysymykset

Tutkielmani tekemisen tavoitteena oli saada kokemusta ja näkökulmaa ylöspäin eriyttävästä opetuksesta. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, miten yhdeksäsluokkalaiset lukioon haluavat oppilaat, jotka aikovat opiskella pitkää matematiikkaa, kokevat ylöspäin eriyttävän opetuksen pienryhmässä sekä miten he kokevat tietokoneen käytön opetuksessa. Lisäksi tutkimuksessa tarkasteltiin, millaiset tehtävät oppilaat kokevat helppoina tai haastavina ja millaiset tehtävät lisäävät oppimismotivaatiota. Tutkimuksessa haettiin vastausta seuraaviin kysymyksiin:

1. Millaiset ylöspäin eriyttävät tehtävät motivoivat oppilaita?
2. Mitä mieltä oppilaat ovat tietokoneen käytöstä matematiikan opiskelussa?
3. Miten ylöspäin eriyttämistä voidaan toteuttaa yläkoulun matematiikassa?

5 Tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin laadullisena tutkimuksena, koska tutkimukseen osallistuvien oppilaiden ryhmä oli suhteellisen pieni ja tutkimuksen tavoitteena oli selvittää oppilaiden mielipiteitä ja tuntemuksia matematiikan ylöspäin eriyttämiseen liittyen. Tutkimuksen kohteena oli tarkemmin oppilaiden kokemuksen merkitykset ja niiden ymmärtäminen ja tulkinta, joka viittaa fenomenologiseen tutkimukseen. Lisäksi fenomenologis-hermeneuttisen tutkimuksen piirteenä on, että tutkimuksen tekijä sekä tutkimuksen kohde on ihminen. (Tuomi ym. 2018)

Tutkija toimi opettajana tutkimusryhmälle tutkimuksen aikana ja näin ollen tutkimuksen havainnointi oli täysin osallistuvaa. Lisäksi tutkimusjakson aluksi ja tutkimusjakson jälkeen teetettiin sama opetettavan aihepiirin termienmäärittelytehtävä, jossa havainnoitiin matematiikan kielentämistä. Lopuksi jokainen osallistuja haastateltiin henkilökohtaisesti yksilöhaastattelussa.

5.1 Ylöspäin eriyttävä materiaali

Tutkimuksen toteuttamista varten koottiin ylöspäin eriyttävä tehtäväkokonaisuus sähköiseen muotoon. Tavoitteena oli rakentaa monipuolinen ja kattava syventävien ja soveltavien tehtävien kokonaisuus, sekä tarjota oppilaille mahdollisuus tutustua lukiossa käytössä oleviin sähköisiin ohjelmiin ja niiden käyttöön. Oppituntien aiheet olivat kahden muuttujan yhtälö, yhtälöpari, yhtälöparin graafinen ratkaiseminen ja algebrallinen ratkaiseminen sekä yhtälöparin sovelluksia. Tehtävät koottiin yläkoulun matematiikan kirjoista *Kuutio Y*, *Kuutio Ekspertti*, *Säde 3* ja *Laskutaito 9* sekä lukion lyhyen ja pitkän matematiikan kirjoista *MAB2 Summa* ja *MAB2 Tekijä* sekä *MAA4 Juuri*. (Hassinen ym. 2017, Hassinen ym. 2018, Etelämäki ym. 2016, Laurinolli ym. 2010, Etelämäki ym. 2016, Ekonen ym. 2016, Hähkiönniemi ym. 2016)

Erilaisilla tehtävätyypeillä tavoiteltiin monipuolista matemaattista oppimista. Osa kysymyksistä ja tehtävistä muodostettiin aiheen teorian pohjalta joko termien selitystehtäviksi tai pohdintatehtäviksi yhteisesti koko ryhmälle. Osa tehtävistä oli aikaisemmin opitun kertaamista esimerkiksi suoran piirtäminen. Tämän jälkeen tehtiin uusia havaintoja esimerkiksi kuvaajan ja pisteiden sijoittumisesta koordinaatistoon.

Selitystehtävissä oli tarkoituksena tuoda termien kielentäminen osaksi matematiikkaa. Osassa tehtävistä taas sanallinen muoto muutettiin matemaattiseen muotoon muodostamalla yhtälö. Ryhmäpohdintatehtävissä tarkoituksena oli lisätä matematiikan kielentämistä, yhdessä ryhmätyönä ratkaisun löytämistä ja oppilaiden itsenäistä oivaltamista. Tällaisen tehtävän avulla pohdittiin yhtälöparin ratkaisujen mahdollista lukumäärää ja yhtälöparin yhtälöiden yhtäläisyyksiä ja eroja näissä tapauksissa.

Lisäksi tehtävien avulla tutustuttiin lukion ylioppilaskirjoituksissakin käytössä olevaan Geogebra -ohjelmaan. Ohjelma tarjoaa työkalut yhtälönratkaisuun, kuvaajien piirtoon, taso- ja 3D-geometriaan sekä näiden visuaaliseen hahmottamiseen. Geogebralla tehtiin pisteiden, suorien ja tasojen piirtämistehtäviä, joista tehtiin havaintoja. Esimerkiksi kuinka kahden muuttujan yhtälö on x, y -koordinaatistossa suora, mutta x, y, z -koordinaatistossa saman yhtälön kuvaaja on taso.

Jokainen opetettavan kokonaisuuden aihe pyrittiin aloittamaan aikaisemmin opittujen taitojen avulla ratkaistavalla johdantotehtävällä. Johdantotehtävää havainnoimalla tai ratkaisutapaa pohtimalla pyrittiin löytämään yhteys uuteen opittavaan asiaan. Esimerkiksi yhtälöpareihin siirryttiin etsimällä kahdelle yhtälölle sellainen lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt. Kun yhtälöiden kuvaajat ja lukuparia kuvaava piste piirrettiin koordinaatistoon, huomattiin pisteen sijoittuvan yhtälöiden leikkauspisteeseen.

Yhtälöparien lisäksi oppilaille esitettiin yhtälöryhmän käsite ja ratkaisumallin idea. Materiaalissa käsiteltiin myös yhtälöryhmän esittämistä ja ratkaisua matriisimuodossa, mutta tämä jäi ajanpuutteen vuoksi oppilaiden oman kiinnostuksen mukaan itsenäisesti tutustuttavaksi aiheeksi. Ylöspäin erittävän materiaalin tehtävät löytyvät lopusta (liite 1).

5.2 Aineiston kerääminen

Tutkimus suoritettiin eräässä yläkoulussa syksyllä 2019. Tutkimukseen osallistui yhden yhdeksännen luokan ne oppilaat, jotka tiesivät haluavansa yläkoulun jälkeen lukioon ja valitsevansa pitkän matematiikan opiskelun. Näin valikoidulle kahdeksan oppilaan ryhmälle opetettiin samaa aihetta kuin muillekin saman luokan oppilaille, mutta opetus järjestettiin erillisessä luokkatilassa ja tutkimuksen tekijä toimi ylöspäin eriytettävän ryhmän opettajana. Ennen opetusjakson aloittamista osallistuvien oppilaiden huoltajille lähetettiin tutkimuslupakirje (liite 2).

Oppilailla oli viikossa matematiikkaa kaksi kaksoistuntia ja yksi yhden oppitunnin pituinen tunti. Yhden oppitunnin pituus oli 45 minuuttia. Tutkimusta varten ylöspäin eriyttävää pienryhmäopetusta järjestettiin ensin kahdeksan oppituntia, jonka jälkeen tutkimuksen tekijä opetti koko kyseiselle yhdeksännelle luokalle viisi oppituntia, joiden sisältö oli yhtälöparien sovellukset ja aiheen kertaus ennen koetta. Koko luokan yhteisessä opetuksessa tutkimukseen osallistuvalle kahdeksalle oppilaalle tarjottiin ylöspäin eriyttäviä eli tässä tapauksessa haastavampia soveltavia tehtäviä kuin käytössä olleen oppikirjan, *Kuutio Y*, tehtävät. Tietokoneet eivät olleet kuitenkaan käytössä enää yhteisillä tunneilla.

Aineistoa kerättiin havainnoimalla oppilaita opetustilanteessa tutkijan ollessa opettajan roolissa. Yksi tutkimusmenetelmä oli näin ollen osallistuva havainnointi. Tutkijan osallistuminen aktiivisesti tutkimuksen kohteena olevaan toimintaan on sitä perustellumpaa, mitä toiminnallisempi tutkimuksen aihe ja näkökulma on. Tässä tutkimuksessa osallistuminen oli hyvinkin perusteltua, sillä tutkija toimi tutkimusryhmän opettajana tutkimuksen aikana ja tavoitteena oli etsiä erilaisa toimintatapoja omaan opettajuuteen. (Tuomi ym. 2018) Lisäksi tutkimuksen kannalta oppilaiden keskinäinen ja opettajan ja oppilaan väliset sosiaaliset vuorovaikutukset muodostivat tärkeän osan tutkimusaineistoa, sillä luokassa sosiaalisella vuorovaikutuksella on suuri merkitys esimerkiksi oppimismotivaatioon. (Vasalampi 2017)

Kielentämisen kehittymisen ja aiheen keskeisten termien oppimisen arvioimista varten koko luokalle teetettiin kirjallinen kielentämistehtävä tutkimuksen aluksi sekä lopuksi. Tämä tehtävä löytyy ylöspäin eriyttävästä materiaalista kappaleesta kahden muuttujan yhtälö tehtävä 1 (liite 1).

Tutkimuksen pääasiallinen aineisto oppilaiden mielipiteistä ja tuntemuksista ylöspäin eriyttävästä opetuksesta kerättiin haastattelemalla jokainen oppilas henkilökohtaisesti yksitellen. Haastattelun runko löytyy lopusta (liite 3). Aineiston hankintatapaa valitessa huomioitiin tutkimusryhmän koko sekä stereotyyppinen oletus, että yläkouluikäisiltä nuorilta ei välttämättä saa riittävän monipuolista kirjallista vastausta tutkimusta varten. Lisäksi haastattelun etuna on joustavuus, kun haastattelijalla on mahdollisuus toistaa kysymys, tarkentaa kysymystä tai selventää jotain ilmaisua tai termiä tarvittaessa.(Tuomi ym. 2018)

5.3 Aineiston analysointi

Tutkimuksen aineistoa analysoitiin ryhmittelemällä kerätty tutkimusaineisto teemoittain. (Tuomi ym. 2018) Oppilaiden kielentämisen kehitystä analysoitiin käsitetestin vastauksista. Vastaukset jaettiin ensin neljään ryhmään: tutkimusryhmä ennen ja jälkeen sekä verrokkiryhmä ennen ja jälkeen. Vastauksista merkittiin hyvät vastaukset, joissa käsite oli osattu määritellä oikein ja perustellusti. Seuraavaksi merkittiin oikean ajatuksen sisältävät vastaukset, jotka olivat kuitenkin puutteellisesti perusteltu hyviin vastauksiin verratessa. Lopuksi merkittiin täysin väärät vastaukset sekä tyhjät vastaukset. Merkintöjen jälkeen vertailtiin hyvien ja oikeiden vastausten lisääntymistä ennen ja jälkeen kyselyissä sekä tutkimusryhmän ja verrokkiryhmän hyvien ja oikeiden vastausten määrien eroja. Samoin lisäksi vertailtiin täysin väärien käsitysten ja tyhjien vastausten määriä.

Haastatteluaineistossa vastaukset ryhmiteltiin mielipiteiden samankaltaisuuden ja vastakohtaisuuden perusteella. Vastaukset tehtävätyyppien ja opittujen aiheiden vaikeustasosta ja motivoivuudesta ryhmiteltiin aihepiirien mukaan. Vastaukset tietokoneen käytön mielekkyydestä sekä ylöspäin eriyttävästä opetuksesta sekä matematiikan tasoryhmistä ryhmiteltiin myönteisiin ja kielteisiin vastauksiin. Tutkimusryhmän pienen koon vuoksi haastattelun vastauksia käsiteltiin yksittäisinä mielipiteinä eikä lähdetty tutkimaan sitä korreloivatko tietyn tyyppiset vastaukset toisiaan eri oppilaiden välillä. Vastausten ryhmittelyn lisäksi haastattelussa esiin nousseita mielipiteitä tulkittiin oppilaiden kokemusten, koetun merkityksellisyyden ja yhteisöllisyyden kannalta, jotka ovat analysoinnin fenomenologis-hermeneuttisen käsityksen kannalta keskeisiä teemoja. (Tuomi ym. 2018)

6 Tutkimuksen tuloksia

Tutkimuskysymyksissä tavoiteltiin tutkijalle hyödyllisiä näkökulmia oman opettajuuden kannalta. Tutkimuskysymyksiin vastaamisen lisäksi tutkimuksen toteutuksesta haettiin ideoita, mitkä ovat toimivia tai ei toimivia ratkaisuja ylöspäin eriyttämisessä. Tuloksien tarkastelu on jaettu aineiston hankintatapojen mukaisesti kolmeen osaan. Tässä luvussa tarkastellaan ensin oppilaiden vastauksia kielentämistehtävään eli termien selittämistehtävään (liite 2). Seuraavaksi esitellään haastatteluista saatuja vastauksia. Lopuksi esitellään tutkijan tekemiä huomioita oppituntien aikana.

6.1 Oppilaiden kielentämisen kehitys

Tutkimuksen aluksi eriytettävä ryhmä sekä muut oppilaat samalta luokalta vastasivat yhtälöparien aihealueeseen liittyvien käsitteiden selitystehtävään. Selitettävät käsitteet olivat *muuttuja*, *lauseke*, *yhtälö*, *lukupari*, *kuvaaja* sekä *graafinen esitys*. Eriytetyssä ryhmässä käsitteistä parhaiten osattiin selittää muuttuja sekä yhtälö, sillä kaikki vastaukset olivat hyviä tai vähintään oikein jo alkukyselyssä. Loppukyselyssä hyvien vastauksien määrä oli kasvanut. Hyväksi vastaukseksi luokiteltiin sellainen vastaus, jossa oli sanallisia perusteluja ja jokin esimerkki.

> *Muuttuja on "yhtälön osa, joka ei ole vakio. Merkitään jollakin kirjaimella. Yhtälö ratkaistaan yleensä jonkin muuttujan mukaan."*
>
> *Yhtälö on "sellainen, missä on yhtäsuuruusmerkin puolilla lausekkeet, esim.* $2x + 4 = 3x + 3$*."*

Verrokkiryhmälle muuttujan käsite oli myös selkeästi tuttu, mutta useampi vastaus oli *"muuttuja on x"* tai *"luku joka muuttuu."* Yhtälön käsite selitettiin usein lausekkeena, jossa on muuttuja ja vain yhdessä vastauksessa loppukyselyssä oli mainittu yhtäsuuruusmerkki, kun eriytetyn ryhmän vastauksissa tämä oli mainittu kuudessa vastauksessa kahdeksasta.

Osa käsitteistä oli selkeästi vieraampia alkukyselyssä, sillä lukupari ja graafinen esitys jätettiin verrokkiryhmässä useammin tyhjäksi kuin vastattiin ja eriytetyssä ryhmässä lukuparia ei kukaan selittänyt oikein. Loppukyselyssä tyhjien vastausten määrä väheni merkittävästi ja eriytetyn ryhmän vastaukset olivat kahta vastausta lukuun ottamatta hyviä.

”Lukupari on pari, joka toteuttaa yhtälön, jolla kaksi muuttujaa (x,y) koordinaatistossa.”

Tiivistettynä voidaan todeta, että eriytetyn ryhmän hyvien ja oikeiden vastausten määrät pysyivät samoina tai kasvoivat alkukyselystä loppukyselyyn. Lisäksi vastaukset tarkentuivat, sillä vastaukset olivat suurimmaksi osaksi hyviä. Ne siis sisälsivät sanallisia perusteluja ja esimerkkejä. Haastatteluissa nousi esiin matematiikan kielentämisen haasteet

”kielentäminen, koska sitä ei olla tehty matikassa juuri koskaan, nii se on vaikee löytää ne oikeet ilmasut, miten sen asian sanoo”

Verrokkiryhmällä lauseke, lukupari ja kuvaaja eivät olleet käsitteenä loppukyselyn perusteella vielä opetusjakson jälkeenkään hallussa, sillä oikeiden vastausten määrä jopa väheni alkukyselyn ja loppukyselyn välillä.

6.2 Oppilaiden ajatuksia tehtävistä

Haastattelun alkuosan kysymykset perustuivat oppitunneilla tehtyihin tehtäviin ja opittuihin aiheisiin. Helpoimmiksi koettujen tehtävien aiheet jakautuivat lähes tasan, kun neljä haastateltavaa vastasi helpoimmiksi tehtäviksi algebralliset tehtävät ja kolme vastasi graafisen ratkaisun tehtävät.

OP1.1: *”Algebralliset, sellaset peruslaskeminen ja ryhmäpohdinta.”* ja
OP2: *”Kun piti piirtää niitä kuvaajia.”*

Haastavimpina tehtävinä koettiin kielentäminen sekä soveltavat tehtävät opetusjakson lopussa ja esimerkiksi yhtälöparien laajentaminen kolmen muuttujan ja kolmen yhtälön yhtälöryhmiksi.

OP3.1: *”Kielentäminen ku sitä ei oo ollu aikasemmin, nii se oli vaikeeta selittää niitä termejä”*

OP4.1: *”En oikeen tiiä, varmaan jotku vikat tehtävät, jos niis piti pohtia iha hirveesti, nii ne oli varmaan. Ainaki yhtälöryhmät näytti vaikeilta, vaikken ehtiny tehdä niitä.”*

Motivoivimmissa tehtävissä nousi esiin uuden oppiminen. Oppilaiden mielestä oli motivoivaa, kun huomasi oppineensa uuden aiheen ja osasi ratkaista haastaviakin tehtäviä.

> OP4.2: *"Varmaan ne algebralliset yhtälöparitehtävät, kun oon oppinu ne nii osaan tehdä niitä nyt."*

> OP3.2: *"Sellaset missä piti kuitenki vähä eka miettiä ettei heti tullu vastaus mieleen."*

Tai, kun oppilas oppi käyttämään uutta tietokoneohjelmaa muuten haastavien tehtävien ratkaisemiseen.

> OP5.1: *"Laskimen (TI-Nspire) käyttö ja yhtälöryhmien ratkaisu sillä."*

Tai, kun oppilas huomasi, että uudenlaiseen tehtävätyyppiin vastaaminen alkoi sujua.

> OP1.2: *"No ehkä se kielentäminen, ku sitte ku niissä onnistu, nii se tuntu kivalta."*

Pääosin tehtävät tehtiin tietokoneella. Kaikki tehtävänannot olivat sähköisessä tiedostossa, vaikka osa kirjoitti vastaukset välillä vihkoonsa. Lisäksi yhtälöparien graafista ratkaisua opeteltiin tekemään Geogebralla, jota kaikki oppilaat eivät olleet aikaisemmin käyttäneet. Kysymykseen, miltä tietokoneen ja Geogebran käyttö oppitunneilla tuntui, vastauksista kuusi kahdeksasta oli positiivisia.

> OP4.3: *"Oli ihan kivaa, mut oon vähän hitaampi laskee koneella. Mut Geogebra oli hauskaa ja se ku ne on niitä mitä lukioski tulee"*

Vastauksista oli havaittavissa myös se, että uuden työskentelytavan, eli tässä tapauksessa tietokoneen käytön, aloittaminen oli vaikeaa. Kuitenkin alun hankaluuden jälkeen tietokoneella tekeminen oli *kivaa* ja vaikka osa oli lopuksi sitä mieltä, että vihkoon on helpompi tehdä, niin kuitenkin kuvaajien piirtämisessä nähtiin selkeä etu Geogebran käytössä.

6.3 Oppilaiden ajatuksia ylöspäin eriyttävästä opetuksesta

Haastattelun loppuosan kysymykset kohdentuivat ylöspäin eriyttävän opetukseen toteutukseen. Kysymyksillä haettiin vastauksia siihen, millaista ylöspäin eriyttävää opetusta oppilaat ovat jo saaneet tai millaista ylöspäin eriyttävää opetusta he haluaisivat saada. Tässä oli selkeä ero siinä, minkä koettiin olevan ylöspäin eriyttävää opetusta tai ylöspäin eriyttäviä tehtäviä. Varsinaista erillistä kirjan ulkopuolista eriyttävää materiaalia ei oppitunneilla olla käytetty.

OP1.3: *”Kaikki ollaan tehty niitä samoja, en tie onks kukaan pyytänykään mitään muuta”.*

Viisi kahdeksasta vastaajasta oli sitä mieltä, ettei ole saanut ylöspäin eriyttävää opetusta. Eivätkä he ole kokeneet kirjan tehtävien vaikeustasoa riittävän ylöspäin eriyttävänä.

OP6: *”ei siel (kirjassa) oikee sellasii haastavii tehtävii löydy oikeesti".*

Kaksi vastaajista koki saaneensa ylöspäin eriyttävää opetusta ja heille kirjan vaikeimmat tehtävät ovat tarjonneet ylöspäin eriyttämistä.

OP5.2: *”No joo ku siel (kirjassa) on niitä vaikeimpia tehtäviä”.*

Koska tutkimus suoritettiin ylöspäin eriyttävänä pienryhmäopetuksena, osallistujilta kysyttiin mitä mieltä he olisivat saman tapaisesta järjestelystä opetuksessa esimerkiksi nyt tarjottavan tuetun erityisopetuksen tapaan. Kaikkien vastaukset olivat positiivisia ylöspäin eriyttävän pienryhmäopetuksen toteutuksen puolesta. Vastauksia perusteltiin etenkin työrauhan ja avun saannin kannalta.

Haastattelussa kysyttiin myös osallistujien mielipidettä tasoryhmäopetuksesta. Tässä välittyi selkeästi, että vastauksissa pohdittiin laajemmin koko ikäluokkaa eikä vain omaa opiskelua. Vastaukset jakautuivat noin puoliksi siitä, oltiinko tasoryhmäopetuksen puolella vai sitä vastaan. Etuina nähtiin mahdollinen työrauhan parantuminen sekä paremmin oman tasoisen opetuksen saaminen. Haittoina nähtiin mahdollisuus eriarvoisuuden kokemiseen sekä tasoryhmän vaihtamisen vaikeus.

OP3.3: *”No mun mielest se on silleen ehkä niinku parempi ku nyt, ku on oman luokan kaa tai silleen et pystyy paremmin tekee sen oman tason mukaan omalle tasolle hyviä tehtäviä ja siinä on myös niitä, jotka on samalla tasolla, niin siinä on niitä, joiden kans pystyy paremmin tekee. Mut vois olla vähä ärsyttävä juttu, jos olis vähä huonommas ryhmäs, nii se ei olis kiva, jos ajattelis, että ois parempi, mut sit oliski siinä huonommas ryhmäs eli oman tason valinta tai siirtyminen toiseen ryhmään ois vaikeeta.”*

6.4 Opettajan ajatuksia ylöspäin eriyttävästä opetuksesta

Tehtävien vastauksien ja haastattelujen lisäksi tutkijan opettajanäkökulma ja huomiot opetuksen aikana haluttiin ottaa huomioon aineistossa.

Kun opetuksessa siirryttiin yhtälöpareihin, niin yhtälöparien ratkaisuja tutkittiin aluksi tehtävien 1 ja 2 avulla: ”Mitä huomaat kohdissa 1c ja 2c löytämistäsi lukupareista sekä ratkaisun graafisesta esityksestä?”. Tehtävien tavoitteena oli, että oppilaat löytävät ensin kahdelle eri yhtälölle ratkaisuja kokeilemalla. Kun löytyy lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt, piirretään molemmat suorat sekä lukuparin piste samaan koordinaatistoon. Kun oppilaat olivat piirtäneet molempien tehtävien yhtälöt sekä lukuparien pisteet, keskustelimme yhdessä, miten ne sijoittuvat koordinaatistoon. Opettajan näkökulmasta oppilaat oivalsivat hyvin, miten suorien leikkauspiste kuvaa sitä pistettä, jota vastaava lukupari ratkaisee molemmat yhtälöt eli kyseisen yhtälöparin.

Seuraavaksi pohdimme yhdessä, kuinka monta ratkaisua yhtälöparilla, jonka molempien yhtälöiden kuvaajat ovat suoria, voi olla. Piirsin taululle x,y-koordinaatiston, johon piirsin esimerkkisuoria oppilaiden ehdotusten mukaan. Samalla hain kyselemällä vastauksia seuraavaan tehtävään ”Pohtikaa ryhmässä ja kirjoittakaa omin sanoin, kuinka monta ratkaisua kahden muuttujan yhtälöparilla voi olla. Perustelkaa eri tapauksissa, mitä yhteistä yhtälöparin yhtälöillä on riippuen ratkaisujen määrästä?”. Teimme tehtävän siis yhdessä ryhmätyönä niin, että opettajana johdattelin keskustelua eteenpäin tarpeen tullen. Kaikki vastaukset tulivat oppilailta itseltään kuitenkin lopulta.

Tästä seuraavalla oppitunnilla oppilaat keskustelivat siitä, että tuntuu siltä kuin mitään ei olisi opittu. Kertasin, mitä kaikkea olemmekaan opetelleet, niin kaikki olivat sitä mieltä, että kyllä he osaavatkin nämä asiat. Vaikuttaisi siis siltä, että kielentäminen ja teorian käyminen oppilaslähtöisesti pohdiskellen ei ole oppilaille selkeä oppimistapa ja silloin ei ole täysin selvää, mitä on opittu tai olisi tarkoitus oppia. Oppiminen tapahtuu ikään kuin vahingossa ja huomaamatta. Selkeämpää on perinteinen ”peruslaskeminen” ja opettajajohtoinen opetus, sillä enemmän olisi kaivattu kertausta tuntien alkuun. Haastatteluissa tuli esiin, että *”ope käyttää aina sitä, että se kertaa samat aina uusiks”*. Myös opettajan näkökulmasta, kuin myös haastattelujen vastauksista kävi ilmi, helpoimpia tosiaan olivat perinteiset laskutehtävät, joista oli selkeästi tarkistettavissa, onko vastaus oikein.

Opettajan näkökulmasta tietokoneiden käyttö sujui vaihtelevasti. Kun käytössä on koulun tietokoneet, eikä oppilaiden omat, tietokoneelle kirjautumiseen menee aina tunnin alussa aikaa. Oma tietokone voisi olla koko päivän valmiustilassa ja otettavissa nopeasti käyttöön tunnin alussa. Lisäksi aikaa vie uuden koneen hakeminen ja avaaminen, jos jostain syystä kone ei käynnistykään, kun edellinen käyttäjä on unohtanut kirjautua ulos tai laittaa tietokoneen lataukseen. Lisäksi oppilaiden keskittyminen opiskeluun herpaantuu helposti, koska kaikki internetin materiaali on koko ajan helposti saatavilla. Tietokoneen käyttäminen opiskelussa on kuitenkin eduksi, kun halutaan jakaa materiaalia oppilaille. Opeteltavasta aiheesta riippuen apuohjelmista voi olla suuri hyöty, kuten koordinaatistoon suorien piirtämisessä suuremassa ja tarkemmassa mittakaavassa kuin vihkoon olisi mahdollista tehdä.

7 Johtopäätökset

Tässä luvussa tutkimuksen tuloksia ja tuloksista tehtyjä johtopäätöksiä verrataan aikaisempien tutkielmien, jotka esiteltiin luvussa 2.5, tuloksiin ja johtopäätöksiin. Tämän luvun lopuksi vastataan tutkimuskysymyksiin tutkimustulosten perusteella.

Lahdenperän pro gradussa "Lahjakkaan oppilaan opetuksen eriyttäminen" päädyttiin tulokseen, että ainoa selkeästi oppilaiden kaipaama ylöspäin eriyttämisen keino on haastavammat tehtävät. Lisätehtävien koettiin olevan usein perustehtävien tasoa. (Lahdenperä, 2018) Tässä tutkimuksessa haastattelun vastausten perusteella osa koki kirjan vaikeimmat tehtävät riittävän haastavana ylöspäin eriyttäväksi materiaaliksi, osa taas ei. Pääosin tutkimusjakson aikana opittujen aiheiden viimeiset tehtävät ja koko kokonaisuuden lopuksi tehdyt soveltavat tehtävät koettiin haastavimpina ja toisaalta motivoivimpina tehtävinä. Nämä olivat pääosin lukion lyhyen matematiikan kirjoista valittuja tehtäviä. Tämän tutkimuksen tulokset ovat siis samansuuntaisia sen suhteen, että lahjakkaat ja matematiikassa hyvin pärjäävät oppilaat tarvitsevat riittävän haastavia matematiikan tehtäviä motivaation ylläpitämiseksi. Haastavia tehtäviä olisi hyvä tarjota tunnilla, jolloin opettajalta on mahdollisuus kysyä apua tehtävän ratkaisuun. Toisaalta ylöspäin eriyttävien tehtävien miettimiseen on kotona mahdollisesti parempi työrauha ja vaihtoehtoiset kotitehtävät ovat näin ollen hyvä eriyttämisen keino, kuten myös Usenius pro gradu -tutkielmassaan kirjoitti (Usenius 2015).

Tutkimuksen lopussa, kun matematiikan oppitunnit järjestettiin taas koko luokan kesken ja haastatteluissa, tuli ilmi, että meteli ja näin ollen työrauhan puuttuminen koetaan ongelmalliseksi. Toisaalta matematiikkaa osaavilla oppilailla menee aikaa luokkakavereiden auttamiseen, mikä vie aikaa itseltä haastavien tehtävien tekemisestä. Lisäksi, kun opettajan aika menee heikompien oppilaiden auttamiseen ja työrauhan ylläpitämiseen, ei hänellä jää aikaa haastavammissa tehtävissä auttamiseen. Tämä kaikki on seurausta heterogeenisista opetusryhmistä. Tässä tutkimuksessa samoin kuin Pöntisen ja Vuoren tutkimuksessa ylöspäin eriyttämisestä yleisessä tuessa käy ilmi, että opetuksen haasteena on suuret heterogeeniset opetusryhmät, jolloin lahjakkaat oppilaat eivät saa riittävästi tukea oppimiseensa. (Pöntinen, Vuori 2019) Ratkaisuna tähän voisi olla ylöspäin eriyttäminen yleisessä tuessa tai esimerkiksi vapaaehtoisen matikkapajan järjestäminen. Tällaisessa pajassa voisi olla tarjolla viikon aiheisiin liittyviä soveltavia ongelmanratkaisutehtäviä, joita oppilaat ratkaisivat yksin tai yhdessä pienissä ryhmissä.

Yksi tapa ratkaista heterogeenisen ryhmän haasteita on joustava ryhmittely, mistä Loukasmäki kertoo oppilailla olleen pääosin positiivisia kokemuksia. Oppilaiden ryhmittely matemaattisen osaamisen mukaan tarjoaisi oppilaille parhaiten omalle tasolle sopivaa opetusta. Samoin kuin Loukasmäen tutkimuksessa tämänkin tutkimuksen haastatteluissa oppilaat ajattelivat koko ikäryhmän kannalta tasoryhmät mahdollisesti eriarvoistavina. (Loukasmäki 2007) Kuitenkin osa piti siitä huolimatta tasoryhmää yhtenä hyvänä vaihtoehtona, sillä silloin erään oppilaan sanoin ”tunneilla keskityttäisiin oikeasti matematiikkaan”. Tämä ero, miten matematiikan opiskeluun keskityttiin, oli selkeästi havaittavissa ylöspäin eriyttävän pienryhmän ja koko luokan matematiikan oppitunteja vertaamalla.

Seuraavaksi vastataan tutkimuskysymyksiin. Ensimmäisenä tutkimuskysymyksenä oli, millaiset ylöspäin eriyttävät tehtävät motivoivat oppilaita. Motivoivia olivat tehtävät, joissa oppilaat huomasivat oppineensa uuteen aiheeseen liittyvien tehtävien ratkaisutavan tai he oppivat käyttämään uutta ohjelmaa tai vastaamaan uudenlaiseen tehtävätyyppiin kuten matematiikan termien kielentämisen oppiminen (*OP1.2*, *OP4.2*). Motivoivia olivat myös haastavat tehtävät, joita piti pohtia ensin, eikä ratkaisu heti tullut mieleen tai ollut ilmiselvä (*OP3.2*). Tällaisen tehtävän onnistunut ratkaisu vahvistaa uuden oppimisen tunnetta, sillä soveltavan tehtävän ratkaiseminen on suora palaute oman matemaattisen osaamisen kehityksestä. Osittain ongelmatehtävistä tuli siis tuntien aikana rutiinitehtävä, kun ratkaiseminen alkoi olla sujuvampaa. Näin ollen oppilaiden proseduraalinen sujuvuus ja strateginen kompetenssi opeteltavasta aiheessa kasvoivat oppimisen edetessä.

Tutkimuksen teoreettisessa viitekehyksessä luvussa 2.3 esitellyt motivaatioteoriat tukevat sitä, että tutkimukseen osallistuvat ovat motivoituneita ylöspäin eriyttävän matematiikan opetukseen, sillä kaikki aikovat jatkaa peruskoulun jälkeen opiskelua lukiossa ja opiskella siellä pitkää matematiikkaa. Heillä on siis itsellä ollut mahdollisuus vaikuttaa valinnoillaan osallistua tähän opetusryhmään ja näin ollen vaikuttaa opiskelutapoihin, mikä on itsemääräämisteorian mukaan keskeisiä tekijöitä opiskelumotivaation synnyssä ja ylläpitämisessä. (Vasalampi 2017) Myös odotusarvoteorian mukaan tutkimukseen osallistuneet oppilaat ovat motivoituneita, koska he todennäköisesti arvostavat matematiikkaa oppiaineena. (Viljaranta 2017, Salmela-Aro 2018) Lisäksi voidaan olettaa, että oppilailla on todennäköisesti yritteliäisyys selkeänä osana matemaattista osaamista.

Toinen tutkimuskysymys oli, mitä mieltä oppilaat ovat tietokoneen käytöstä matematiikan opiskelussa. Ainakin aluksi tietokoneiden käyttö oli haastavaa, niin kuin yleisesti kaikki erilaiset opiskelutavat aina aluksi ovat. Tietokoneiden käyttäminen nähtiin kuitenkin hyödyllisenä tulevaisuuden eli lukio-opiskelun kannalta, joten motivaatio ja halu tietokoneen sujuvan käyttämisen oppimiseen oli suhteellisen korkea (*OP4.3*). Yksi opetusjaksolla tavoiteltavista hyödyistä oli, että tietokoneiden käyttäminen ja lukiossa käytettäviin ohjelmiin tutustuminen jo yläkoulussa madaltaisi tietokoneiden käyttöön oton kynnystä lukioon siirryttäessä.

Viimeinen tutkimuskysymys, johon tutkimuksella haettiin vastauksia, oli, miten ylöspäin eriyttämistä voidaan toteuttaa matematiikassa. Selvää on, että tutkimuksen kaltaisiin kahdeksan oppilaan pienryhmiin resurssit eivät riitä. Vaikka Suomessa luokkakoot ovat keskimääräistä pienemmät, on työrauha silti usein ongelma (Opetushallitus 2019). Luokkien jakaminen tasoryhmiin mahdollistaa eriyttämisen kohdentamisen oppilaiden tason mukaan. Tämä ei kuitenkaan ole oppilaiden haastattelun perusteella mielekkäin vaihtoehto, ainakaan silloin, jos on jo totuttu olemaan oman luokan kesken. Lisäksi oppilaat kokevat eriarvoistumisen tasoryhmäopetuksen riskinä.

Tämän ja aikaisempinen tutkimusten perusteella eriyttäminen matematiikassa, voidaan toteuttaa tarjoamalla oppilaan tasolle sopivia tehtäviä oppitunneilla ja kotitehtäviksi. Ylöspäin eriyttävänä materiaalina etenkin yhdeksäsluokkalaisille voidaan tarjota lukion oppikirjojen tehtäviä samoista aiheista. Lisäksi tietokoneohjelmistoihin voidaan tutustua koko luokan kesken tai antamalla sähköistä oppimateriaalia lisätehtäviä tarvitseville oppilaille. Jos ohjelmistoihin tutustuminen on itsenäistä, tarvitaan selkeät ohjeet. Oppilaat kuitenkin uskoivat selviävänsä opetusjakson tasoisista tehtävistä ja esimerkiksi Geogebran käyttämisestä riittävän hyvillä kirjallisilla ohjeilla.

Toinen ylöspäin eriyttämisen toteutustapa, johon oppilailla oli haastattelujen perusteella positiivinen suhtautuminen, on tukiopetuksen kaltainen ylöspäin eriyttävä pienryhmä. Tällaista ”matikkapaja” -toimintaa voisi järjestää esimerkiksi kerran viikossa niin, että oppilaat voisivat tulla laskemaan tehtäviä ohjatusti yksin tai yhdessä. Tilaisuus voisi olla kaikille avoin vuosiluokasta riippumatta. Tämä tarkoittaisi kuitenkin sitä, että toiminnan vastuuopettajan tulisi tietää jokaisen matematiikan ryhmän matematiikan opetuksen etenemistahti ja aiheet. Lisäksi tehtäviä tulisi olla tarjolla kaikista viikon aiheista. Toisaalta oppilaat voisivat laskea joistain aiheista vain kirjan lisätehtäviä, tai toimintaa järjestettäisiin vain ennalta sovituista teemoista kootusti.

8 Pohdintaa

Tässä luvussa käsitellään tutkimuksen onnistumista ja luotettavuutta sekä eettisiä ratkaisuja. Lopuksi pohditaan, mitä hyötyä tästä oli tutkijan oman opettajuuden kehittymisen kannalta.

Tutkimuksen onnistumisen kannalta oli harmillista, että opetukseen oli käytettävissä kolme 45 minuutin oppituntia vähemmän kuin alun perin suunnitelmassa oli. Näiden oppituntien käyttäminen olisi oletettavasti lisännyt oppilailla laitteiden ja ohjelmien parempaa hallintaa, sillä ohjelmiin tutustumiseen olisi voitu käyttää enemmän aikaa. Nyt TI-Nspire laskinohjelma jouduttiin aikataulullisista syistä jättämään todella vähäiselle käytölle, vaikka juuri se olisi ollut hyvin hyödyllinen oppilaiden tulevia lukio-opintoja ajatellen. Kuitenkin koko aihepiirin aiheet täytyi ehtiä käsitellä opetusjakson aikana. Opetettavan aiheen kannalta opettajan näkökulmasta Geogebran käyttäminen oli kannattavampaa, sillä oppilaat eivät olleet sitäkään vielä käyttäneet ja kuvaajien piirtäminen auttoi hyvin hahmottamaan yhtälöparien ratkaisua.

Opetusjakson jälkeen koko luokan oppilailla oli sama matematiikan koe. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden koetulokset olivat samaa tasoa kuin keskimäärin aikaisemminkin. Ylöspäin eriyttävän opetuksen ei ollut tarkoituskaan parantaa arvosanoja vaan tarjota erilaista lähestymistapaa matematiikan opiskeluun ja lisätä oppilaiden omaa syvällisempää pohdintaa opetettavasta aiheesta. Opettajana koen opetusjakson onnistuneen, sillä oppilaat vaikuttivat tyytyväisiltä opetuksen vaihteluun ja lisäksi he kokivat tietokoneen käytön sekä käytetyt ohjelmat hyödyllisinä tulevaisuuden kannalta.

Tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa pitää ottaa huomioon, että tutkimuksen tavoitteena ei ollut saada koko Suomeen yleistettävää tutkimustulosta ylöspäin eriyttävän opetuksen toteuttamisesta, vaan tukea tutkijan oman opettajuuden kehittymistä. Tutkimusta ei siis voida pitää määrällisesti luotettavana, sillä se pohjautuu vain muutaman oppilaan mielipiteisiin ja on tapaustutkimus. Tutkimukseen osallistuvan ryhmän kooksi toivottiin vähintään viittä oppilasta, joten kahdeksaan oppilaaseen voidaan olla hyvin tyytyväisiä. Huomioitavaa on, että eri opetusryhmissä oppilaiden mielipiteet voivat olla hyvinkin erilaisia. Tutkimus voidaan toistaa teettämällä samoja ylöspäin eriyttäviä tehtäviä kuin tässä tutkimuksessa. Haastattelemalla saadut tutkimustulokset kuitenkin edustavat ainoastaan kyseisen ryhmän oppilaiden mielipiteitä. Toisaalta esimerkiksi motivoivimmiksi tehtäviksi oppilaat valitsivat soveltavia tehtäviä, mitä motivaatioteoriat tukevat.

Koska tutkimuksen pääasiallinen aineisto kerättiin haastattelemalla, on tarpeellista pohtia myös, oliko aineiston keruutapa luotettava. On mahdollista, että oppilaiden vastauksiin vaikutti se, että haastattelijana toimi sama henkilö kuin opettajana. Toisaalta myös tutkija itse saattaa haastattelijana tehdä johtopäätöksiä tai johdatella haastateltavaa huomaamattaan yhteisen opetusjakson perusteella. Tämä kuitenkin tiedostettiin etukäteen ja siihen kiinnitettiin huomiota haastattelua suunniteltaessa. Lisäksi jokaista haastateltavaa muistutettiin ennen haastattelun alkua, että tutkimuksen kannalta heidän tulisi kertoa oma mielipiteensä mahdollisimman rehellisesti eikä miettiä niin sanottuja oikeita vastauksia, joita kuvittelevat opettajan haluavan kuulla. Voidaan kuitenkin olettaa, että haastattelemalla saatiin kerättyä luotettavampi aineisto kuin siinä tapauksessa, että oppilaat olisivat vastanneet kyselylomakkeeseen. Kyselylomakkeessa ei voida olla varmoja, onko vastaaja ymmärtänyt kysymyksen oikein ja tarkentavia kysymyksiä ei voida esittää, mikäli vastaus on suppea tai jää kokonaan tyhjäksi.

Tutkimuksen eettisyyden varmistamiseksi tehtiin seuraavia ratkaisuja. Ennen ylöspäin eriyttävän opetusjakson alkua oppilaiden vanhemmille kerrottiin tutkimuksesta ja kysyttiin lupa oppilaan osallistumiselle. Myös oppilas itse sai kieltäytyä osallistumasta, niin halutessaan. Haastatteluaineistoa ei säilytetä tutkimuksen valmistuttua, mikä kerrottiin myös ennen tutkimusta oppilaille sekä heidän huoltajilleen. Tutkimukseen osallistuvien oppilaiden nimiä, luokkaa eikä koulua esitetä tässä julkaisussa. Tutkimukseen osallistujat ovat tiedossa ainoastaan tutkimuksen tekijällä, oppilaiden matematiikan opettajalla, huoltajilla ja tutkimukseen osallistuvilla itsellään. Tutkimusta voidaan pitää eettisenä myös oppimistulosten näkökulmasta, sillä siihen osallistuvien koenumerot pysyivät samalla tasolla kuin keskimäärin muutenkin.

Miten itse aion lähteä toteuttamaan ylöspäin eriyttävää opetusta jatkossa? Koska soveltavat tai muuten haastavammat tehtävät olivat oppilaiden mielestä motivoivimpia tehtäviä, heille voisi tarjota lukion oppikirjoista tehtäviä opeteltavasta aiheesta. Kuitenkin mielestäni ensin on edelleen tärkeä oppia uusi opeteltava asia oikein perustehtäviä tehden. On lähes varmaa, että yleisesti opetuksen resurssit eivät riitä erilliseen ylöspäin eriyttävään pienryhmään. Kuitenkin näkisin hyvänä ajatuksena järjestää ylöspäin eriyttävälle opetukselle aikaa ainakin kerran viikossa. Tämä voitaisiin toteuttaa esimerkiksi tarjoamalla iltapäivällä koulupäivän jälkeen oppilaille tilaisuus saada ylöspäin eriyttäviä tehtäviä viikon aikana opittavista asioista. Luokkatilassa ohjaava opettaja voisi olla tarvittaessa apuna, esittää ylöspäin eriyttävää materiaalia yhteisesti tai oppilaat voisivat kokoontua keskenään laskemaan ja pohtimaan tehtäviä.

Suurin muutos, mitä tekisin toisin tutkimuksen opetusosuuden toteuttamisessa ja mitä aion hyödyntää jatkossa yläkoulussakin, on lukion sähköisten kokeiden Abitti koejärjestelmän käyttäminen. Abittijärjestelmän langaton verkko on suhteellisen nopea rakentaa, sillä sen ehtii tehdä välitunnin aikana. Ensimmäiset kerrat oppilaiden avatessa Abittia tietokoneella vievät oman aikansa, mutta lukioon menevillä sen opettelu on joka tapauksessa edessä. Hyviä puolia opetuksen kannalta järjestelmässä on, että internet ei ole käytössä, joten tunnin aikana oppilaiden keskittyminen pysynee paremmin matematiikassa. Lisäksi Abitti koejärjestelmässä on käytettävissä kaikki tarvittavat sähköiset ohjelmistot, kuten TI-Nspire ja Geogebra -sovellukset. Näihin ei siis tarvitse tällöin erikseen hankkia lisenssiä tai ladata koulun tai oppilaiden tietokoneille. Toisaalta oppilaat kirjautuvat aina järjestelmään omilla henkilötunnuksillaan. Kaikki yläkouluikäiset eivät kuitenkaan muista henkilötunnustaan ulkoa, joten ennen tuntia opettajan täytyy muistaa pyytää ottamaan tunnukset mukaan. Lisäksi opettajan täytyy tehdä Abittiin koe, jotta Abittijärjestelmässä voidaan tehdä tehtäviä. Toisaalta valmiit tehtävänannot voidaan lisätä esimerkiksi kuvina kokeeseen.

Kaiken kaikkiaan tutkimus voidaan todeta onnistuneeksi, sillä siitä oli paljon hyötyä tutkijan oman opettajuuden kehittymisen kannalta. Tutkimuksen tärkein tavoite siis saavutettiin. Jatkotutkimuksena voitaisiin tehdä toinen haastattelu syksyllä 2020, kun tutkimukseen osallistuneet oppilaat ovat mahdollisesti aloittaneet lukio-opinnot. Tällöin voitaisiin selvittää kuinka hyödyllisenä he kokevat lukio-opintojen kannalta sen, että tietokonetta ja lukiossa käytössä olevia tietokoneohjelmia on käytetty matematiikan opiskelussa jo yläkoulussa.

9 Lähteet

Anton, H. & Rorres, C., 2013. Elementary Linear Algebra, 11th Edition. the United States of America: Wiley.

Beezer, R., 2015. A first course in linear algebra, version 3.50. Washington: Congruent Press. Saatavilla: http://linear.pugetsound.edu, Viitattu 17.4.2020

Ekonen, M., Hassinen, S., Hemmo, K. & Taskinen, T., 2016. MAB2 Tekijä, Lausekkeet ja yhtälöt. Oppikirja. Sanoma Pro Oy.

Etelämäki, H., Hirvonen, K., Nieminen, J. & Pösö, J., 2016. MAB2 Summa, Lausekkeet ja yhtälöt. Oppikirja. Edita.

Etelämäki, H., Koppatz, N., Laitinen, A., Lammi, P. & Nieminen, J., 2016. Säde 3. Oppikirja. Edita.

Friedberg, S., Insel, A. & Spence, L., 1997. Linear Algebra, Third Edition. New Jersey: Precentice Hall, Upper Saddle River.

Halinen, H., Kurvinen, S., Ottelin, J., Parmanen, K., Tauriainen, T. & Vallineva, S., 2015. MAB2 Huippu, Lausekkeet ja yhtälöt. Oppikirja. Otava.

Hassinen, S., Latva, O., Makkonen, J-P., Pirttimaa, M. & Tolvanen, A., 2017. Kuutio Y. Oppikirja. Sanoma Pro Oy.

Hassinen, S., Latva, O., Makkonen, J-P., Pirttimaa, M. & Tolvanen, A., 2018. Kuutio Ekspertti. Oppikirja. Sanoma Pro Oy.

Haukkanen, P., 2017. Lineaarialgebra 1A. Opintomoniste, Saatavilla: https://coursepages.uta.fi/mttmp3/wp-content/uploads/sites/80/2017/11/LA1Amoniste.pdf, Viitattu: 23.11.2019.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T., Urpiola, T. & Heikkilä, P., 2015. Pii 9. Oppikirja. Otava.

Hella, L., 2020. Ohjaajan kanssa käyty sähköpostikeskustelu 21.4.2020.

Hähkiönniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luoma-aho, E., Raittila, T. & Tikka, T., 2016. MAA4 Juuri, Vektorit. Oppikirja. Otava.

Häsä, J., 2013. Lineaariset yhtälöryhmät. Opintomoniste, Saatavilla: https://www.cs.helsinki.fi/u/jhasa/kurssit/lm1_kesa13/lm1_luku5.pdf, Viitattu: 16.4.2020

Joutsenlahti, J., 2015. Lukiolaisten tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä. Väitöskirja, Tampereen yliopisto.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen T., 2018. Matemaattisenajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa Joutsenlahti J., Silfverberg H., Räsänen P, 2018. Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B., 2001.Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J. & Swafford, J., 2002. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Lahdenperä, E. 2018. Lahjakkaan oppilaan opetuksen eriyttäminen. Pro gradu -tutkielma, Turun yliopisto.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho., E., Sankilampi, T., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O., 2010. Laskutaito 9. Oppikirja. WSOYpro Oy.

Loukasmäki, E., 2007. Joustava ryhmittely matematiikassa. Pro gradu-tutkielma, Tampereen yliopisto.

O’Nan, M., 1976. Linear Algebra, Second Edition. Harcourt Brace Jovanovich.

Opetushallitus, 2019. Artikkeli. Saatavilla: https://www.oph.fi/fi/uutiset/2019/kuukauden-tilasto-perusopetuksen-opetusryhmat-ovat-suomessa-pienempia-kuin-oecd-maissa, Viitattu: 14.3.2020.

Opetushallitus, 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Next Print Oy.

Opetushallitus, 2015. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Helsinki: Next Print Oy.

Pöntinen, J. & Vuori, T., 2019. Matematiikan ylöspäin eriyttäminen yleisessä tuessa — Matematiikan opettajan näkökulma. Pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto.

Salmela-Aro, K., 2018. Motivaatio ja oppiminen. Jyväskylä: PS-kustannus.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A., 2018. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Usenius, H., 2015. Opettajan kokemuksia ylöspäin eriyttämisestä matematiikassa ensimmäisellä luokalla ja Kymppi -oppimateriaalissa. Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto.

Vasalampi, K., 2017. Itsemääräämisteoria, Teoksessa Salmela-Aro K., Nurmi J-E., Feldt T. Mikä meitä liituttaa. Jyväskylä: PS-kustannus.

Viljaranta, J., 2017. Odotusarvoteoria - Odostusten ja arvostusten vaikutus oppimismotivaatioon. Teoksessa Salmela-Aro K., Nurmi J-E., Feldt T. Mikä meitä liikuttaa. Jyväskylä: PS-kustannus.

Yli-Sikkilä, M., 2014. Soveltavaa laskemista ja ongelmanratkaisua. Pro gradu -tutkielma, Tampereen yliopisto.

10 Liitteet

Liite 1. Ylöspäin eriyttävät tehtävät

Liite 2. Tutkimuslupakirje

Liite 3. Haastattelukysymykset

Liite 1. Ylöspäin eriyttävät tehtävät

Tarkoituksena, että olen itse ohjaamassa pienryhmätyöskentelynä tehtävien tekemistä.

Tiedoston oikeassa laidassa olevassa osiossa on tehtävien vastauksia, perusteluja tehtävien valinnasta ja huomioita tehtävien ohjauksesta. Oppilaille on tarkoitus tehdä lisäksi lomake tms. johon merkkaavat, miltä tehtävä tuntui vaikeustasoltaan ja oliko tehtävä muuten hyvä, tylsä, motivoiva, oppiko oppilas uutta tms.

Ohje oppilaille: Ota valokuva vihkoon tehdyistä tehtävistä ja liitä kuva tehtävänannon yhteyteen. Ota ruutukaappauskuva tietokoneen ohjelmilla ratkaistuista tehtävistä ja liitä kuva tehtävänannon yhteyteen. Kaikkien tehtävien teossa ryhmätyöskentely ja keskustelu on sallittua, jopa suositeltavaa.

Kahden muuttujan yhtälö ti 8.10. 1h

1. Selitä seuraavat termit omin sanoin. (teetätä koko luokalla)
   a) muuttuja
   b) lauseke
   c) yhtälö
   d) lukupari
   e) kuvaaja
   f) graafinen esitys

Selittäminen tuntui vaikealta. Helposti lähdettiin hakemaan oikeaa vastausta netistä ja oman pohdinnan tuottaminen oli epävarmaa.

2. Miten voit tutkia toteuttaako jokin lukupari annetun yhtälön?

3. Tutki toteuttaako seuraavat *lukuparit yhtälön* 2x + 3y = 1.
   a) (2, -1)
   b) (-1, 2)
   c) Ratkaise yhtälö 2x + 3y = 1 y:n suhteen ja piirrä yhtälön kuvaaja vihkoosi. Piirrä samaan koordinaatistoon a ja b kohdan pisteet. Mitä huomaat?

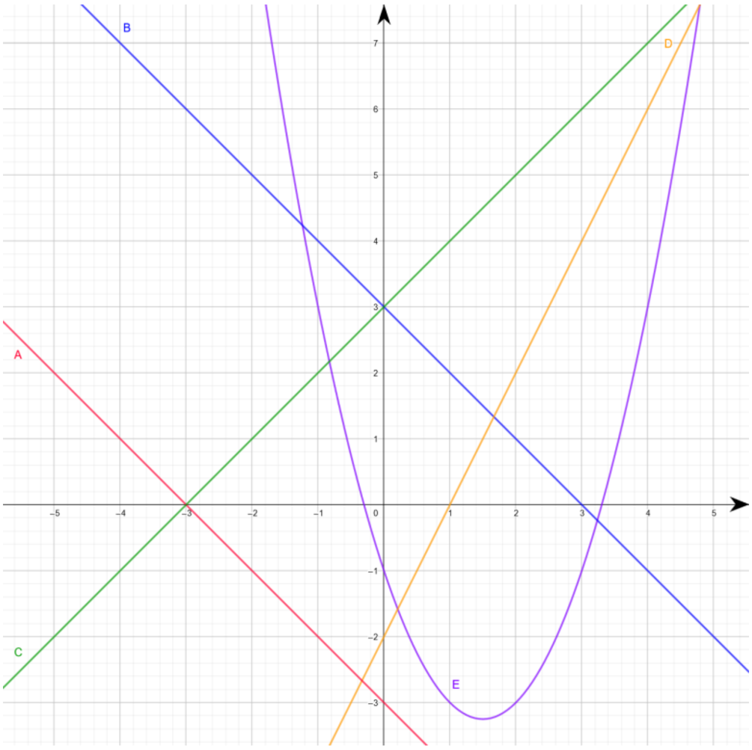
Tehtävän 3. yhtälössä on kaksi *muuttujaa* x ja y. Tämän yhtälön *graafinen esitys* on ______________. Yhtälö voidaan esittää *yleisessä muodossa* ax + by = c, jossa x ja y ovat muuttujia ja a, b ja c ovat reaalilukuja.

1. *Tehtävän tarkoitus on tuoda termien kielentäminen osaksi matematiikkaa.*

3.
   a) vasen puoli saa arvon 1, siis toteuttaa (1 = 1)
   b) vasen puoli saa arvon 4, joten ei toteuta ($4 \neq 1$)
   c) piste (2, -1) on suoralla. Piste (-1, 2) ei ole suoralla.

Kerrataan aikaisemmin opittua kuvaajan piirtämistä. Ja havaitaan samalla, että yhtälön toteuttava lukupari on suoralla, mutta toinen lukupari ei ole.

4. Mikä (tai mitkä) seuraavista kuvaajista on kahden muuttujan yhtälön 2x – y = 2 graafinen esitys? Miksi?



4. D

Tämäkin kertauksena aiemmasta, miten yhtälöstä voidaan suoraan päätellä sen graafinen esitys.

5. Muodosta kahden muuttujan yhtälö seuraavista lauseista ja kerro, mitä muuttujat merkitsevät.
   a) Tiinu on kahdeksan vuotta vanhempi kuin Liinu.
   b) Pusero on 22 € halvempi kuin housut.

5. Kuutio Y, s.43: 7

   a) x = y + 8 tai y = x – 8
   b) x = y – 22€ tai y = x + 22€

6. Parkkipaikalla on autoja x kappaletta ja moottoripyöriä y kappaletta. Muodosta kahden muuttujan yhtälö, kun
   a) autoja ja moottoripyöriä on yhteensä 25
   b) autoissa ja moottoripyörissä on renkaita yhteensä 90.
   c) Toteutuvatko a- ja b- kohdan yhtälöt, kun autoja on 20 ja moottoripyöriä 5?
   d) Toteuttaako lukupari (26, -1) a-kohdan yhtälön? Voiko se olla tehtävän ratkaisu?

6. Kuutio Y, s. 81: 106

   a) x + y=25
   b) 4x + 2y=90

Tehtävät 5 ja 6 sanallisen tehtävän muuttaminen matematiikan kielelle.

7. Pohtikaa ryhmässä, miten selittäisitte ensimmäisen tehtävän termit.
   a) muuttuja
   b) lauseke
   c) yhtälö
   d) lukupari
   e) kuvaaja
   f) graafinen esitys

Tutustutaan Geogebra -ohjelmaan pe 11.10. 1h

Tutustutaan lukion ylioppilaskirjoituksissakin käytössä olevaan ohjelmaan, joka hyvä työkalu yhtälönratkaisuun, kuvaajien piirtoon, taso- ja 3D-geometriaan yms. sekä näiden hahmottamiseen.

1. Selitä seuraavat termit omin sanoin.

a) koordinaatisto
b) origo
c) Kaksiulotteinen koordinaatisto (2D-koordinaatisto)
d) Kolmiulotteinen koordinaatisto (3D-koordinaatisto)
e) Mikä olisi yksiulotteinen koordinaatisto (1D-koordinaatisto)

Piste tai yhtälö voidaan piirtää GeoGebralla kirjoittamalla syöttökenttään annetun pisteen koordinaatit tai annettu yhtälö.

2. Piirrä koordinaatistoon pisteet A = (0,0), B = (1, 2) ja C = (-3,2)

3. Piirrä pisteelle (1, 2) peilikuva

a) x-akselin suhteen
b) y-akselin suhteen
c) origon suhteen

4. Piirrä koordinaatistoon yhtälöiden 3 + x = 5 - x ja y = 6 – 3 kuvaajat. Millainen on yhden muuttujan yhtälön graafinen esitys, kuvaile niin tarkasti kuin osaat? Päteekö äskeinen johtopäätöksesi kaikille yhden muuttujan kuvaajille?

5. Piirrä koordinaatistoon suoran y = 2x kuvaaja. Tutki toteuttavatko pisteet C = (3, 6) ja D = (3, 5) yhtälön.
Keksi yhtälö, joka toteuttaa molemmat yhtälöt?

6. Avaa 3D-piirtoalue ja käännä näkymä saman suuntaiseksi kuin 2D-piirtolaue.

7. Piirrä pisteet E = (3, 6, 1) ja F = (2, 4, 0). Älä käännä piirtoaluetta. Näkyykö piste 2D-piirtoalueella, miksi?

   Kun siirrytään 3d koordinaatistoon pisteitä merkitään lukukolmikkona.

8. Voit käännellä 3D-piirtoaluetta. Piirrä yhtälö 3x +6y +z = 0. Millainen on yhtälön kuvaaja?

9. Piirrä uudelleen kohdan 5 yhtälön kuvaaja y = 2x. Millainen tämän yhtälön kuvaaja on 3D-piirtoalueella?

Yhtälöpari pe 11.10. ma 21.10. 1 + 1h

1.
   a) Etsi kolme lukuparia, jotka toteuttavat yhtälön x + y = 5
   b) Etsi kolme lukuparia, jotka toteuttavat yhtälön x – y = 1.
   c) Etsi lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt.
   d) Piirrä molempien yhtälöiden kuvaajat koordinaatistoon.

Alkutehtävät 1ja 2 voi ratkaista edellisen kappaleen taidoilla. Tarkoituksena on johdatella siihen, että kahdella suoralla voi olla yhteinen ratkaisu, jossa suorat leikkaavat toisensa.

2. Etsi kolme lukuparia, jotka toteuttavat
   a) yhtälön 2x - y = 2
   b) yhtälön 3x + y = 8.
   c) Etsi lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt.
   d) Piirrä molempien yhtälöiden kuvaajat koordinaatistoon.

3. Mitä huomaat kohdissa 1c ja 2c löytämistäsi lukupareista sekä ratkaisun graafisesta esityksestä?

3. Molemmissa tehtävissä lukupari, joka toteuttaa molemmat yhtälöt, on molemmilla suorilla. Tässä pisteessä suorat risteävät (leikkauspiste)

Yhtälöparilla tarkoitetaan kahta yhtälöä, joille etsitään *molemmat yhtälöt toteuttavaa ratkaisua*. Yhtälöt x + y = 5 ja x – y = 1 voidaan esittää yhtälöparina seuraavasti

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on (3,2) tai x=3 ja y=2 tai $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Yhtälöparin ***yleinen muoto*** on

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x - b_2y = c_2 \end{cases},$$

missä x ja y ovat muuttujia.

Tehtävän 4 tarkoitus on lisätä matematiikan kielentämistä, yhdessä ratkaisun löytämistä ja itsenäistä oivaltamista.

4. Pohtikaa ryhmässä ja kirjoittakaa omin sanoin, kuinka monta ratkaisua kahden muuttujan yhtälöparilla voi olla. Perustelkaa eri tapauksissa, mitä yhteistä yhtälöparin yhtälöillä on riippuen ratkaisujen määrästä?

4. Ratkaisuja on yksi, kun suorat leikkaavat, nolla kun suorat ovat yhdensuuntaiset eli kulmakertoimet ovat samat ja ääretön määrä, kun suorat ovat samat.

5. Toteuttaako lukupari (5,11)
   a) yhtälön y = 2x +1
   b) yhtälön y = 3x – 4
   c) yhtälöparin $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

5. Kuutio Y, s.82: 107

a, b ja c: toteuttaa

6. Yhtälöpari $\begin{cases} y = ax - 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ toteutuu, kun x = 2. Ratkaise vakion a ja muuttujan y arvo.

7. Tutki, onko lukupari $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ yhtälöparin ratkaisu.
   a) $\begin{cases} y = x + \frac{1}{6} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 9y = 8 \end{cases}$

8. Muodosta yhtälöpari, jolla
   a) ei ole ratkaisua.
   b) on täsmälleen yksi ratkaisu.
   c) on ääretön määrä ratkaisuja.

Yhtälöryhmä muodostuu kahdesta tai *useammasta* yhtälöstä. Yhtälöryhmän ratkaisuja ovat luvut, jotka toteuttavat *kaikki* yhtälöryhmän yhtälöt.

9. Mikä lukupareista (0,1), (-1,2) vai (-2,1) toteuttaa yhtälöryhmän $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ -2x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$?

Kun kaikki yhtälöryhmän yhtälöt ovat ensimmäisen asteen yhtälöitä kyseessä on tarkemmin *lineaarinen yhtälöryhmä* ja suora on *lineaarisen yhtälön* kuvaaja.

6. Kuutio Y, s. 82: 110, y=5 ja a=4

7. Kuutio Y, s. 82: 111, a ja b: on

Graafinen ratkaiseminen ma 21.10. 1h

1. Tutki, onko lukupari (2,3) yhtälöparin $\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = x + 1 \end{cases}$ ratkaisu? Piirrä yhtälöitä kuvaavat suorat vihkoosi ja merkitse piste (2,3).

Yhtälöparin ratkaisu on yhtälöitä kuvaavien suorien ____________________________, joka voidaan löytää piirtämällä yhtälöiden kuvaajat. Tätä kutsutaan graafiseksi ratkaisemiseksi.

2. Ratkaise piirtämällä vihkoosi seuraavat yhtälöparit
   a) $\begin{cases} 2y = x \\ x - 2y = -3 \end{cases}$
   y=1/2x ja y=1/2x+3/2
   b) $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = \frac{1}{5}x + 1 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} y = -3x - 3 \\ -6x - 2y = 6 \end{cases}$
3. Ratkaise graafisesti seuraavat yhtälöparit. Piirrä yhtälöt ensin vihkoosi ja tarkista vastauksesi Geogebralla.
   a) $\begin{cases} -x + 14y = -7 \\ -x + 16y = 8 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

Onko graafisesti määritetty ratkaisu tarkka-arvo? Miksi?

4. Ratkaise graafisesti seuraavat yhtälöryhmät Geogebralla. Perustele lisäksi vastauksesi sanallisesti.
   a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x = 2y - 5 \\ 3x = y + 1 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2r + 4 = 3t - 3 \\ r + 1 = -6t \\ 3r + 10 = 12t - 3 \end{cases}$

5. Ratkaise graafisesti Geogebran 3D-koordinaatistossa.
   a) $\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 2\mathrm{z} = 0 \\ x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x + y - 3z = -\frac{1}{2} \\ -x + y - 3z = 2 \\ 4x + y - 3z = 5 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$

leikkauspiste

2. a) ei yhtään ratkaisua, samat kulmakertoimet, b) yksi ratkaisu, eri kulmakertoimet, c) ääretön määrä ratkaisuja, samat suorat.

Otetaan seuraavaksi Geogebra avuksi, jolloin yhtälöt voivat olla vaikeampia ja voidaan käyttää enemmän tilaa ja ulottuvuuksia kuin vihkoon piirtämällä.

3. a) Vihkoon piirtäen ratkaisu ei riittävän tarkka, koska x-akseli tulisi piirtää hyvin pitkäksi. Kulmakertoimet eivät ole samat, joten on olemassa yksi ratkaisu.

b) Ratkaisu ei ole kokonaisluku lukupari, joten vihkoon piirtäen ratkaisu on epätarkka?

Lähennä tehtävän 3b leikkauspistettä. Löydätkö tarkan desimaaliarvon?

4. a) ei ratkaisua, b) tehdään *muuttujan vaihto* (r,t) -> (x,y) koordinaatistoon piirtämistä varten. Ratkaisu on (-3; 0,33). Ratkaisu on likiarvo!

5. *Tarkastele tasojen leikkauspistettä valitsemalla valikosta "kahden pinnan leikkaus". Tee leikkaussuorat jokaisen tason välille ja tarkastele näiden suorien leikkauspistettä.*

   a) (-4,-5,-7)
   b) ei ratkaisua
   c) (1,-1,3)

Algebrallinen ratkaiseminen **ti 22.10. 1 h pe 25.10. 2h**

Graafisesti ratkaisemalla saadaan yhtälöparille likimääräinen ratkaisu. Tarkkaa ratkaisua voi yrittää etsiä kokeilemalla, mutta se saattaa olla työlästä.

1. Selvitä ja selitä omin sanoin, mitä tarkoittaa ***algebrallinen*** ratkaisu.

2. Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti
   a) $\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y = 2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$
   c) Selitä omin sanoin, miten ratkaisit a- ja b-kohdan yhtälöparit.

I. Sijoituskeino

Ratkaistaan toinen yhtälöparin yhtälöistä muuttujan y tai x suhteen ja sijoitetaan sitä vastaava lauseke toiseen yhtälöparin yhtälöön vastaavan muuttujan paikalle. Ratkaistaan jäljelle jääneen muuttujan arvo ja sijoitetaan sen arvo ensimmäiseen yhtälöön ja ratkaistaan toisenkin muuttujan arvo. Tarkistetaan vastaus sijoittamalla ja kirjoitetaan vastaus.

ESIM. Ratkaistaan yhtälöpari sijoituskeinolla. Seuraa ratkaisun vaiheita ja täytä tehtävä ohjeiden mukaan. Vaihda tehtävissä symbolin ”?” paikalle oikea muuttuja tai luku ja lisää tarvittaessa välivaiheita ratkaisuusi. Voit tehdä välivaiheet vihkoosi tai suoraan tähän tiedostoon

$\begin{cases} x + 2y = 21 \\ y = x - 3 \end{cases}$

Sijoiteta alemman yhtälön muuttujan y lauseke x-3 ylemmän yhtälön muuttujan y paikalle:

x + 2y = 21

x + 2(?) = 21

Ratkaise saamastasi yhden muuttujan yhtälöstä muuttuja x

x = ?

Sijoita ratkaistu muuttujan arvo alemman yhtälön muuttujan x paikalle

y = ? - 3

Ratkaisen muuttujan y arvo

y = ?

Tarkista vastaus sijoittamalla saamasi arvot alkuperäisiin yhtälöihin!
x + 2y = 21 ja y = x - 3

Anna vastaus muodossa (x, y)

1. Yhtälöparin ***algebrallinen*** ratkaiseminen tarkoittaa ratkaisun etsimistä ***laskemalla***. Tällöin ratkaisuksi saadaan *tarkka arvo*.

2. Tarkoitus on pohjustaa sijoituskeinoa yhtälöparin ratkaisussa ja vahvistaa oppilaan omaa oivaltamista.

Täydennettävä esimerkki korvaa valmiin esimerkin. Tarkoitus on osallistuttaa oppilaita uuden asian oppimisessa.

Yhtälöparin ratkaisu pitää aina etsiä laskemalla, ellei toisin mainita.

3. Ratkaise yhtälöparit

   a) $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ x = y + 7 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y + x = 1 \\ y = -x - 2 \end{cases}$

4. Määritä suorien y=-4x+3 ja y=x-2 leikkauspiste.

5. Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y + x = \frac{1}{5} \\ y = -\frac{2}{5}x + 1 \end{cases}$

6. Määritä a ja b siten, että suorat ax + b=2 ja bx + 2ay= -1 leikkaavat toisensa pisteessä (2,3).

7. Muodosta yhtälöpari, kun luvun x neljäsosan ja luvun y summa on kaksi sekä luvun x ja neljä kertaa luvun y erotus on nolla.

II. Yhteenlaskukeino eli muuttujan eliminointi

- Yhtälöparin yhtälöt kerrotaan sellaisilla luvuilla, että toisen muuttujan kertoimista tulee toistensa **vastalukuja**.
- Tämän jälkeen yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, jolloin saadaan yhden muuttujan yhtälö.
- Ratkaistaan tämä muuttuja ja sijoitetaan jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan toisenkin muuttujan arvo.
- Tarkistetaan vastaus sijoittamalla ja kirjoitetaan vastaus.

ESIM. Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla. Seuraa ratkaisun vaiheita ja täytä tehtävä ohjeiden mukaan.

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2x - y = 19 \end{cases}$$

Kerrotaan alempi yhtälö sellaisella luvulla, että yhtälöissä muuttujien y kertoimet ovat toistensa *vastalukuja.*

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 2x - y = 19 \quad || \cdot 2 \end{cases}$$

Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin muuttuja y häviää eli eliminoituu

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ \underline{4x - 2y = 38} \end{cases}$$

$$x + 4x + 2y - 2y = 12 + 38$$

$$5x = 50 \; ||:5$$

$$x = 10$$

3. Mab2 Summa: ilman laskinta suoritettava, vaativa tai kurssin keskeisen sisällön ulkopuolinen tehtävä. s.87: 239 a) (19, 12) b) ei ratkaisua.

4. Mab2 Summa, s. 86: 233, (1, -1)

5. Mab2 Summa: ilman laskinta suoritettava, vaativa tai kurssin keskeisen sisällön ulkopuolinen tehtävä. s. 87: 238, (-4/3, 1 8/15)

Täydennettävä esimerkki korvaa valmiin esimerkin. Tarkoitus on osallistuttaa oppilaita uuden asian oppimisessa.

Saatu muuttujan x arvo sijoitetaan jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä ja ratkaistaan y

$x + 2y = 12$

$10 + 2y = 12 \;\; || - 10$

$2y = 12 - 10$

$2y = 2 \; ||: 2$

$y = 1$

Tarkistetaan sijoittamalla saadut muuttujien x ja y arvot alkuperäisiin yhtälöihin.

$10 + 2 * 1 = 12$ ja $2 * 10 - 1 = 19$

Anna vastaus muodossa (x, y) = (10,1)

8. Ratkaise yhtälöparit yhteenlaskumenetelmällä
   a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

9. Ratkaise yhtälöparit yhteenlaskumenetelmällä
   a) $\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 3x + 7y = -2 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$

10. Ratkaise yhtälöparit
   a) $\begin{cases} 2s - 3t = -20 \\ 3s - 5t = -20 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x - 3 \\ 5y = 2x - 4 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} -3x + 4y - 28 = 0 \\ -\frac{3}{4}x + y - 7 = 0 \end{cases}$

11. Ratkaisen yhtälöpari $\begin{cases} 2x + 3y = -8 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Harjoitellaan sitä, että muuttujat eivät aina ole x, y ja z.

10. Mab2 Summa: ilman laskinta suoritettava, vaativa tai kurssin keskeisen sisällön ulkopuolinen tehtävä.

11. (yo K2004)

Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Muodosta yhtälöryhmän kahden muuttujan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaise muuttujien arvot. Ratkaisen näiden avulla kolmannesta yhtälöstä viimeisen muuttujan arvo.

12. Ratkaise yhtälöryhmä

a) $\begin{cases} y = x - 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -z + 3 \\ 3x - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

12. Laskutaito 9, S344

Yhtälöryhmästä, jossa on kolme yhtälöä ja kolme muuttujaa, voidaan ratkaista ensin yksi muuttuja yhteenlaskumenetelmällä ja sijoittaa se kahteen muuhun yhtälöön. Näistä yhtälöistä saadaan yhtälöpari, joka voidaan ratkaista.

Laajennetaan myös algebrallinen ratkaiseminen yhtälöryhmiin.

13. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 2y - z = 12 \end{cases}$

Kerro alimainen yhtälö sopivalla luvulla niin, että kun kaikki kolme yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, niin x- ja y-termit eliminoituvat.

Ratkaise muuttujan z arvo ja sijoita se kahteen ylimmäiseen yhtälöön. Muodosta näistä yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaise.

14. Ratkaisen yhtälöryhmä sijoitus- ja yhteenlaskukeinoja yhdistämällä.

$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + z = 5 \\ x - y - z = -7 \end{cases}$

Yhtälöryhmästä matriisiksi ma 28.10. 1h

Matriisi on matemaattinen taulukko, jota käytetään muun muassa lineaaristen yhtälöryhmien käsittelyyn ja ratkaisemiseen.

Esimerkiksi yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x+y+2z=1 \\ 2x+3y-z=2 \end{cases}$$

on matriisimuodossa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Matriisimuotoisen yhtälöryhmän ratkaisussa

- Kahden yhtälön paikkaa voidaan vaihtaa
- Yhtälö voidaan kertoa puolittain
- Yhden yhtälön monikerta voidaan lisätä puolittain toiseen yhtälöön

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \|-\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

Toinen rivi (II) vähennetään ensimmäisestä rivistä.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \|-2\mathrm{II} \end{array}$$

Toinen rivi vähennetään kaksinkertaisena kolmannesta rivistä.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \|-\mathrm{I} \end{array}$$

Ensimmäinen rivi vähennetään kolmannesta rivistä.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

Vaihdetaan ensimmäisen ja toisen rivin paikkaa.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

Kun matriisi on saatu ns. porrasmuotoon eli alimmalla rivillä on vain yksi nollasta poikkeava luku, toiseksi alimmalla kaksi jne. Voidaan matriisi muuttaa takaisin yhtälöryhmäksi.

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ \quad y+z=1 \\ \quad -6z=-1 \end{cases}$$

Nyt $z=\frac{1}{6}$, $y=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ ja $x=1-\frac{5}{6}-2\cdot\frac{1}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)$

Matriisit menevät yli jopa lukion oppimäärästä, mutta ovat merkittävä osa sovellettua matematiikkaa. Matriisien osuus tässä on lähinnä esitellä, millaisessa muodossa yhtälöryhmiä käytetään. Lisäksi on tarkoitus etsiä peruskoulun oppilailla teetettävien tehtävien vaikeustason ylärajaa.

15. Ratkaise yhtälöryhmä matriisimuodossa
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}$$

16. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 11 \\ -x + 4y + 2z = 24 \\ 6x - y + 6z = -20 \end{cases}$$

17. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{cases} -3x - 2y + z = -5 \\ 18x - 6z = 6 \\ 6x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

15. (0,0,1)
Toinen rivi |-2 II
Kolmas rivi |+ I
Vaihdetaan toisen ja kolmannen rivin paikkaa.

16 (-3, 5, 1/2)

Tarkoitus hakea vaikeusasteen ylärajaa.

17. 0 = 0, siis ääretön määrä ratkaisuja

Jos yläkoulun koneille saadaan TI-Nspire ohjelmisto harjoitellaan sen käyttöä näitä tehtäviä tehdessä. Tällöin mekaanisen laskemisen sijaan suurin osa ratkaisusta on ratkaisun kulun kielentämistä ja ratkaisun rakenteen harjoittelua.

Sovelluksia ma 28.10. ti 29.10.

Yhtälöparin käyttö ongelmanratkaisussa

- Lue tehtävä huolellisesti
- Piirrä tarvittaessa kuva/taulukko tilanteesta
- Kerää tiedot ja valitse muuttujat
- Muodosta yhtälöt
- Ratkaise yhtälöpari ja laske tarvittaessa lisätietoa
- Kirjoita vastaus
- Tarkista

1. Turisti haluaa vuokrata auton lomansa ajaksi. Autovuokraamo A veloittaa asiakkaaltaan 30€ perusmaksun. Sen lisäksi asiakas maksaa 0,20€ jokaiselta ajetulta kilometriltä. Kilpaileva vuokraamo B veloittaa perusmaksuna 50€, mutta laskuttaa vain 0,10€ jokaiselta ajetulta kilometriltä.
   a) Muodosta yhtälöt, jotka kuvaavat vuokran kokonaiskustannuksia y (€), kun loman aikana ajetaan x kilometriä.
   b) Piirrä molemmat kuvaajat.
   c) Päättele kuvaajan avulla, kumpi vuokraamo kannattaa valita, kun loman aikana ajetaan 250 km.
   d) Päättele kuvaajan avulla, millä ajokilometrillä vuokraamot ovat yhtä edulliset.

1. Mab2 Tekijä, s.95 Pohdinta

Tarkoitus koota edellä opitut asiat askel askeleelta ja yhdistää ne tehtävän ratkaisussa.

2. Elokuvateatterin aikuisten lipun hinta oli 10€ ja lasten lipun hinta 5€. Illan näytäntöön myytiin 300 lippua, joista kertyi rahaa yhteensä 2100€. Kuinka monta aikuisten ja kuinka monta lasten lippua myytiin?

2. Mab2 Tekijä, s.101: 191

3. Leipomo valmistaa kakkuja ja piirakoita. Yhteen kakkuun tarvitaan 5 dl jauhoja ja 2 kananmunaa. Piirakkaan tarvitaan 2,5 dl jauhoja ja 2 kananmunaa. Kaikkiaan jauhoja kuluu 62 litraa ja kananmunia 352. Kuinka monta kakkua ja piirakkaa leivotaan?

3. Mab2 Tekijä, s.101: 194

4. Kirvesmiehet Nieminen ja Korhonen pystyttävät yhdessä talopaketin 18 päivässä. Työskenneltyään 10 päivää Nieminen joutuu sairaslomalle. Korhoselta menee tämän jälkeen 20 päivää työn valmiiksi saattamiseen. Miten jaetaan työstä saatava urakkasumma 18 000 €?

4. Kuutio Ekspertti, s.119: 126, Nieminen 6 000€, Korhonen 12 000 €

5. Kuinka paljon pitää sekoittaa 4-prosenttista suolahappoa ja 30-prosenttista suolahappoa, jotta saadaan yhteensä 800 grammaa 10,5-prosenttista suolahappoa?

6. Pronssi on kuparista ja tinasta koostuva metalliseos. Mitkä ovat kuparin ja tinan määrä pronssissa?

Aine	**Tiheys (g/cm^3)**
Kupari	8,96
Tina	7,28
Pronssi	8,76

5. Säde 3, s.161: 342

4-%: 600 g, 30-%: 200g

6. Säde 3, s.161: 344. Kuparia 88%, Tinaa 12%

Vastataan, joka tunnin/aihealueen jälkeen:

Mikä fiilis oppitunnista jäi

😀 Tunti oli mielenkiintoinen ja opin uutta.

🙂 Tunti oli kiva, mutta olisin kaivannut lisää haastetta tehtäviin.

😮 Tunti oli aivan liian vaikea, enkä ymmärtänyt juuri mitään.

🙄 Tunti oli todella tylsä, enkä oppinut mitään uutta.

Mikä tehtävistä…

oli helpoin, miksi?

oli Haastavin, miksi?

motivoi sinua parhaiten oppimaan, miksi?

Liite 2. Tutkimuslupakirje

Hei oppilas ja huoltaja!

Minä olen Eeva Mäenpää ja opiskelen matematiikan aineenopettajaksi Tampereen yliopistossa. Olen tekemässä pro gradu -tutkielmaani aiheesta yläkoulun matematiikan eriyttäminen ylöspäin. Tutkielmani tarkoituksena on oppilaan matemaattisen ajattelun syventäminen sekä kartoittaa, millaiset tehtävät motivoivat matematiikassa menestyviä oppilaita. Aineistoa tutkimukseen kerätään syyslukukaudella 2019 teettämällä ylöspäin eriyttäviä tehtäviä pienryhmäopetuksena aiheesta yhtälöparit ja niiden ratkaiseminen sekä haastattelemalla oppilaita opetusjakson lopussa.

Aineistoa käytetään tutkielmassani niin, ettei yksittäistä oppilasta voida tunnistaa. Tutkimukseen osallistuvien henkilöiden tiedot eivät tule muiden kuin tutkimuksen tekijän sekä luokan oman matematiikan opettajan tietoon. Tutkimus julkaistaan Tampereen yliopistossa pro gradu -tutkielmana ja tutkimusaineisto hävitetään tulosten julkaisun jälkeen 2kk kuluessa.

Tutkielman ohjaajana Tampereen yliopistossa toimii dosentti Jorma Joutsenlahti, jorma.joutsenlahti@tuni.fi

Yhteystyöterveisin

Eeva Mäenpää

lisätietoja voi kysyä sähköpostitse, eeva.maenpaa@tuni.fi

Palauta lupakirje matematiikan opettajalle viimeistään 4.10.2019

Oppilas ____ saa osallistua tutkimukseen

oppilaan nimi

huoltajan luvalla.

____

päiväys ja allekirjoitus

Liite 3. Haastattelukysymykset

Alkuun: Tarkoitus ei ole vastata niin kuin olettaa haastattelijan haluavan. Vaan tarkoitus on antaa rakentavaa kritiikkiä ja kertoa omista kokemuksista.

- Mikä fiilis oppitunneista jäi, erosiko jonkin oppitunnin fiilis muista?

😀 Tunti oli mielenkiintoinen ja opin uutta.

🙂 Tunti oli kiva, mutta olisin kaivannut lisää haastetta tehtäviin.

😲 Tunti oli aivan liian vaikea, enkä ymmärtänyt juuri mitään.

🙄 Tunti oli todella tylsä, enkä oppinut mitään uutta.

- Millaiset tehtävät olivat helpoimpia, haastavimpia entä motivoivimpia?

  Aiheet:

  - kielentäminen: esim. termien selitys
  - ryhmäpohdinta: esim. yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä
  - graafinen ratkaiseminen
  - Geogebra
  - algebrallinen
    - sijoituskeino
    - yhteenlaskukeino
  - yhtälöryhmät
  - Soveltavat tehtävät

- Miten koit tietokoneen käytön oppitunneilla?
  - esim. tehtävät sähköisesti eikä kirjassa
  - Kuvaajien piirtäminen Geogebralla
  - Olisitko halunnut päästä käyttämään enemmän TI-Nspire laskinohjelmaa?
- Koetko, että olet saanut ylöspäin eriyttävää opetusta normaaliopetuksessa?
  - Kyllä: Millaista?
  - Ei: Jos tämän tyylistä ylöspäin eriyttämistä olisi normaaliopetuksessa, niin onnistuisiko näiden tehtävien teko itsenäisemmin, jos kirjallisia ohjeita olisi enemmän?
- Haluaisitko tehdä tämän tyylisiä tehtäviä (esim. tietokoneella) tunnilla vai kotitehtävinä vai molemmat?
- Mitä mieltä olisit, jos olisi mahdollista järjestää eriyttävää pienryhmäopetusta myös ylöspäin eriyttävästä opetuksesta, alaspäin eriyttävän lisäksi? Haluaisitko osallistua?
- Mitä mieltä olisit tasoryhmäopetuksesta matematiikassa? Niin, että esim. ysiluokat olisi jaettu matematiikassa osaamistason mukaan ryhmiksi?